

NGUYỄN THANH QUANG

KỸ THUẬT CƠ KHÍ

2025

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI



NGUYỄN THANH QUANG

NGHIÊN CỨU MÔ PHỎNG SỐ ỨNG XỬ ĐỘNG
LỰC HỌC CỦA CHI TIẾT DẠNG TRỤC TRÒN CÓ CƠ
TÍNH THAY ĐỔI THEO PHƯƠNG NGANG

ĐỀ ÁN TỐT NGHIỆP THẠC SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ

Hà Nội – 2025

BỘ CÔNG THƯƠNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP HÀ NỘI



NGUYỄN THANH QUANG

**NGHIÊN CỨU MÔ PHỎNG SỐ ỨNG XỬ ĐỘNG LỰC HỌC
CỦA CHI TIẾT DẠNG TRỤC TRÒN CÓ CƠ TÍNH THAY ĐỔI
THEO PHƯƠNG NGANG**

Ngành: Kỹ thuật Cơ khí

Mã số 8520103

ĐỀ ÁN TỐT NGHIỆP THẠC SĨ KỸ THUẬT CƠ KHÍ

NGƯỜI HƯỚNG DẪN:

1. TS. NGUYỄN VĂN LUẬT

Hà Nội – 2025

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Thầy TS. Nguyễn Văn Luật. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Nguyễn Văn Luật, người đã tận tình hướng dẫn, định hướng khoa học, đồng hành và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn. Những góp ý quý báu về mặt chuyên môn và sự nghiêm khắc trong học thuật từ Thầy là kim chỉ nam giúp tôi hoàn thiện đề tài này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong – Khoa Cơ khí, Trường Cơ khí – Ô tô, Đại học Công Nghiệp Hà Nội đã truyền đạt cho tôi những kiến thức nền tảng và chuyên sâu trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Những bài giảng tâm huyết và tinh thần làm việc khoa học của quý Thầy Cô là hành trang quý giá giúp tôi hình thành tư duy nghiên cứu độc lập.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào Tạo Sau đại học, và các đơn vị chức năng của Trường đã tạo điều kiện thuận lợi về cơ sở vật chất, môi trường học tập, cũng như các thủ tục hành chính trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Một lời tri ân đặc biệt xin gửi đến gia đình và bạn bè – những người luôn là chỗ dựa tinh thần vững chắc, động viên tôi vượt qua những khó khăn, áp lực trong suốt chặng đường học tập và nghiên cứu.

Cuối cùng, mặc dù đã nỗ lực hết mình, song luận văn chắc chắn vẫn còn tồn tại những thiếu sót nhất định. Tôi rất mong nhận được sự góp ý, phản biện từ quý Thầy Cô và các nhà chuyên môn để có thể hoàn thiện hơn trong những nghiên cứu tiếp theo.

Hà nội, ngày.....tháng.....năm... ..

Người thực hiện luận văn

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các số liệu và kết quả được trình bày trong Luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ công trình nào khác.

Hà nội, ngày.....tháng.....năm... ..

Người thực hiện luận văn

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN	i
LỜI CAM ĐOAN	ii
Mục lục.....	iii
DANH MỤC HÌNH ẢNH	v
DANH MỤC BẢNG BIỂU	vi
MỞ ĐẦU.....	1
CHƯƠNG 1. Tổng quan về trục tròn FGM.....	4
1.1. Vật liệu có cơ tính biến đổi (FGM).....	4
1.2. Bài toán ứng xử động lực học cho trục tròn	5
1.3. Ứng dụng thực tế.....	6
1.4. Các nghiên cứu về dầm, trục FGM trên thế giới	7
1.4.1. Phương pháp giải tích	8
1.5. Những nghiên cứu về dầm FGM trong nước.....	13
1.6. Định hướng nghiên cứu.....	16
1.7. Điểm mới của luận án	17
CHƯƠNG 2. Phương pháp phần tử hữu hạn cho trục tròn FGM	18
2.1. Tính chất vật liệu FGM.....	18
2.1.1. Mô hình trục tròn 1D-FGM	18
2.1.2. Lý thuyết nghiên cứu về trục	20
2.2. Phương trình vi phân của trục có cơ tính biến thiên theo phương ngang	22
2.2.1. Hàm năng lượng biến dạng của trục	22
2.2.2. Động năng của trục	24

2.2.3. Phương trình chuyển động.....	25
2.3. Xây dựng công thức PTHH cho trục FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang	29
2.3.1. Giới thiệu phương pháp phần tử hữu hạn	29
2.3.2. Hàm dạng cho phần tử trục	34
2.3.3. Ma trận độ cứng cho phần tử trục	35
2.3.4. Ma trận khối lượng phần tử	36
2.3.5. Vec- tơ lực nút	37
2.4. Kết luận chương 2	38
CHƯƠNG 3. Quy trình tính toán và mô phỏng số.....	40
3.1. Quy trình tính toán và thuật toán số.....	40
3.1.1. Phương pháp Newmark.....	40
3.1.2. Quy trình tính toán	44
3.2. Kết quả mô phỏng số và thảo luận.....	45
3.2.1. Mô hình bài toán và thông số vật liệu.....	45
3.2.2. Kiểm nghiệm chương trình tính và thuật toán số.....	46
3.2.3. Mô phỏng bằng phần mềm ANSYS	46
3.2.4. Kết quả số vào thảo luận.....	53
3.3. Kết luận chương 3	66
KẾT LUẬN.....	68

DANH MỤC HÌNH ẢNH

Hình 1.1. Mô hình trục FGM hai pha	12
Hình 2.1. Mô hình trục FGM	19
Hình 2.2. Mặt cắt mô hình của trục FGM.....	19
Hình 2.3. Mô hình 3D trục tròn FGM.....	19
Hình 2.4. Biểu diễn mặt cắt của trục.....	22
Hình 3.1: Trục có cơ tính thay đổi dọc	45
Hình 3.2: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=2$	54
Hình 3.3: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=2$	55
Hình 3.4: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=5$	55
Hình 3.5: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=5$	56
Hình 3.6: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 10, n=5$	56
Hình 3.7: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 10, n=5$	57
Hình 3.8: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20 \text{ rad/s}, k=2$	58
Hình 3.9: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20 \text{ rad/s}, k=2$	58
Hình 3.10: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40 \text{ rad/s}, k=2$	59
Hình 3.11: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n, k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40 \text{ rad/s}, k=2$	59
Hình 3.12: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20 \text{ rad/s}, n=1$	60

Hình 3.13: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20$ rad/s, n=1	60
Hình 3.14: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=60$ rad/s, n=10.....	61
Hình 3.15: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=60$ rad/s, n=10.....	61
Hình 3.16: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, n=5.....	62
Hình 3.17: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, n=5	62
Hình 3.18: Ảnh hưởng của kích thước mặt cắt đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, n=5, k=15.....	64
Hình 3.19: Ảnh hưởng của kích thước mặt cắt đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, n=5, k=15.....	64

DANH MỤC BẢNG BIỂU

Bảng 3.1. So sánh độ võng, góc xoắn lớn nhất của trục bằng kết quả PTHH, giải tích và ANSYS với $\Omega = 20$ (rad/s).....	50
Bảng 3.2. So sánh độ võng, góc xoắn lớn nhất của trục bằng kết quả PTHH, giải tích và ANSYS với $\Omega = 50$ (rad/s).....	51
Bảng 3.3. Đánh giá sai số giữa kết quả ANSYS so với hai kết quả còn lại với $\Omega = 20$ (rad/s) (%).....	51
Bảng 3.4. Đánh giá sai số giữa phương pháp ANSYS so với hai kết quả còn lại với $\Omega = 50$ (rad/s) (%).....	52
Bảng 3.5. Ảnh hưởng của tham số vật liệu tới tần số dao động $\Omega = 40$ (rad/s). Tần số dao động riêng (Hz).....	65

MỞ ĐẦU

Lý do chọn đề tài

Vật liệu biến đổi cơ tính theo không gian (Functionally Graded Materials – FGM), hay còn được gọi là vật liệu đa chức năng, là một dạng vật liệu composite tiên tiến được thiết kế có thay đổi liên tục về đặc tính cơ học trong cấu trúc của vật liệu. FGM ngày càng được ứng dụng thường thấy trong các điều kiện môi trường đặc biệt khắc nghiệt như nhiệt độ cao, môi trường có tính ăn mòn hoặc mài mòn mạnh. Nguyên liệu thường được dùng để chế tạo FGM thường thấy nhất hiện nay là kết hợp giữa gốm – vốn có độ bền cao và khối lượng riêng thấp – với kim loại có độ dẻo cao và khả năng chịu va đập tốt. Sự kết hợp này tạo ra vật liệu có nhiều ưu điểm vượt trội so với các vật liệu thuần nhất truyền thống.

FGM được sử dụng rất phong phú trong nhiều lĩnh vực ngành nghề như cơ khí, y sinh học, điện tử, và hàng không - vũ trụ. Trong kết cấu máy bay hoặc tàu vũ trụ, FGM được sử dụng để tăng cường khả năng chịu tải và chịu nhiệt cho các vùng chịu ứng suất cao của cấu trúc máy bay. Trong y học, vật liệu này có thể được sử dụng để chế tạo các bộ phận cấy ghép nhờ khả năng mô phỏng đặc tính của mô sinh học tự nhiên. Trong ngành kỹ thuật cơ khí, FGM được đánh giá cao nhờ khả năng chịu tải trọng tốt và không gặp phải các vấn đề như tách lớp hay tập trung ứng suất – vốn là nhược điểm của các vật liệu composite phân lớp. Hơn nữa, nhờ sự hỗ trợ của các công nghệ hiện đại, việc điều chỉnh phân bố tỷ lệ vật liệu theo thể tích trong FGM đang ngày càng tối ưu hơn, từ đó nâng cao rõ rệt các đặc tính động học và cơ học của kết cấu.

Lịch sử nghiên cứu

Functionally Graded Materials (FGM) xuất phát từ nghiên cứu và phát triển trong lĩnh vực kỹ thuật vật liệu, đặc biệt là trong lĩnh vực vật liệu cơ học và vật liệu công nghệ cao. FGM được đề xuất bởi những nhà nghiên cứu vật lý người Nhật Bản, Prof. Takashi Hashin và Prof. Masayuki Atsumi vào những năm 1980 về ý tưởng việc

sử dụng các vật liệu đa thành phần để tạo ra các vật liệu có tính chất biến thiên theo không gian.

Từ đó, các nghiên cứu và ứng dụng của FGM ngày càng được nghiên cứu sâu và phát triển và áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như công nghệ hàng không và vũ trụ, cơ khí, vật liệu cách nhiệt, y tế và năng lượng tái tạo, ... Đây là một trong các lĩnh vực nghiên cứu được quan tâm và phát triển mạnh mẽ trong lĩnh vực vật liệu và kỹ thuật vật liệu.

Mục đích nghiên cứu của đề án tốt nghiệp, phạm vi nghiên cứu.

Trục tròn có biến đổi cơ tính theo phương ngang khi chịu ảnh hưởng từ các lực ngoại lai hoặc tải trọng động là một bài toán phức tạp do các tính chất của vật liệu và mặt cắt của ngang của trục đều là các hàm tọa độ không gian. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn làm công cụ để nghiên cứu bài toán và sử dụng phần mềm mô phỏng để nghiệm chứng kết quả là mục đích nghiên cứu của đề án tốt nghiệp này. Đối tượng nghiên cứu của bài toán này là chi tiết dạng trục tròn có cơ tính biến đổi theo phương ngang chịu ảnh hưởng của tải trọng di động và sử dụng phần mềm ANSYS để mô phỏng quá trình biến dạng của chi tiết khi chịu tải trọng. Về khía cạnh phân tích phần tử hữu hạn, để phân tích bài toán trên cần phải có các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và vec-tơ nút cho một phần tử đặc trưng. Đặc tính của các ma trận và vectơ phụ thuộc và các hàm dạng để nội suy trường chuyển vị của phần tử nghiên cứu. Một số định hướng nghiên cứu cụ thể của Luận án là:

1. Lựa chọn và xây dựng các hàm dạng nội suy thích hợp cho từng loại phần tử đối tượng nghiên cứu trong luận án.
2. Xây dựng ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và vec-tơ lực nút, được thiết lập dựa trên các hàm dạng và đặc trưng vật liệu biến đổi theo tọa độ.
3. Lựa chọn thuật toán giải bài toán dao động trong miền thời gian, chẳng hạn như phương pháp Newmark, để giải hệ phương trình chuyển động.

4. Thực hiện mô phỏng số quá trình biến dạng cơ tính của phần tử trục FGM và so sánh, đánh giá và xác nhận tính đúng đắn của mô hình lý thuyết đã xây dựng.

Tóm tắt điểm chính các luận điểm cơ bản và các ý kiến mới của tác giả

Cách thức nghiên cứu.

Do tính chất không đồng nhất theo không gian của vật liệu FGM và sự biến thiên hình học của mặt cắt trục, bài toán dao động trở nên phức tạp và khó giải bằng phương pháp giải tích thuần túy. Vì vậy, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) được lựa chọn làm công cụ chính để xây dựng mô hình và giải quyết bài toán. Các phương trình cơ bản mô tả chuyển động của trục được thiết lập dựa trên nền tảng cơ học lý thuyết, sử dụng các nguyên lý biến phân và phép biến đổi năng lượng trong hệ kết cấu.

Trong quá trình phát triển mô hình và xử lý các biểu thức toán học phức tạp, luận án sử dụng phần mềm Matlab nhằm hỗ trợ tính toán đại số ma trận, rút gọn công thức, cũng như xây dựng các biểu thức phần tử hữu hạn một cách chính xác và hiệu quả. Đồng thời, phần mềm mô phỏng ANSYS cũng được tích hợp như một công cụ kiểm chứng, giúp mô phỏng quá trình biến dạng và phân bố ứng suất của trục FGM dưới tác dụng tải động, từ đó đối chiếu với kết quả tính toán số để xác nhận độ tin cậy của mô hình lý thuyết.

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ TRỤC TRÒN FGM

1.1. Vật liệu có cơ tính biến đổi (FGM)

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material – FGM) lần đầu tiên được phát triển tại Sendai, Nhật Bản vào năm 1984 [1], như một loại vật liệu composite hiện đại với kết cấu đặc trưng bởi sự phân bố liên tục về thành phần vật liệu theo một hoặc nhiều hướng trong không gian. FGM hấp dẫn sự quan tâm rộng rãi từ cộng đồng nghiên cứu trong lĩnh vực vật liệu và cơ học kết cấu nhờ khả năng khắc phục các giới hạn của vật liệu composite truyền thống.

Không giống như vật liệu composite chia lớp, trong đó đường phân chia giữa các lớp có thể gây xảy ra hiện tượng tách lớp và tập trung ứng suất, FGM có sự biến đổi trơn tru về tỷ lệ thể tích của các thành phần – thường là giữa vật liệu kim loại và vật liệu gốm – giúp làm giảm hoặc loại bỏ các bất liên tục cơ học. Sự kết hợp giữa độ bền nhiệt và khả năng chống ăn mòn của gốm với tính dẻo dai và khả năng chịu va đập của kim loại mang lại cho FGM những đặc tính cơ học và nhiệt học vượt trội. Nhờ đó, FGM hiện được áp dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp công nghệ cao như hàng không - vũ trụ, năng lượng hạt nhân, truyền thông, bán dẫn và chế tạo các chi tiết máy yêu cầu độ bền cao trong môi trường khắc nghiệt.

FGM được sử dụng rộng rãi và nhận được nhiều sự quan tâm của giới khoa học là FGM hai pha, pha gốm là pha kim loại, với tỷ lệ thể tích của các pha trong vật liệu thay đổi theo hàm số mũ của một phương trình không gian. Chẳng hạn sự biến đổi tỷ lệ thể tích của kim loại theo chiều ngang của dầm trục theo quy luật hàm số lũy thừa được tác giả nghiên cứu và khái quát như sau:

$$V_C = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n, 0 \leq r \leq R, V_C + V_m = 1 \quad (0.1)$$

Trong đó V_C và V_m theo thứ tự là tỷ lệ thành phần thể tích của pha gốm và kim loại; R là bán kính của trục tròn được nghiên cứu, r là tọa độ của điểm cần xác định trên mặt cắt của trục, số mũ $n > 0$ là tham số vật liệu, xác định sự phân bố thể

tích của vật liệu thành phần. Trong phương trình 1.1 các chỉ số xuất hiện ký hiệu ‘C’ và ‘M’ được dùng để mô tả các pha gốm và kim loại.

Trục FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang được thiết kế nhằm tăng cường độ ổn định và cải thiện khả năng chịu tải sau giới hạn đàn hồi. Trên thế giới hiện nay, các nghiên cứu về trục FGM đã được phát triển mạnh mẽ, đặc biệt là trong lĩnh vực dao động, với mô hình cơ tính biến đổi theo quy luật hàm số lũy thừa. Nhiều công trình tiêu biểu có thể kể đến như của Alshorbagy và cộng sự [2], Shahba và cộng sự, Gan và cộng sự, Wang và Wu, cùng với một số tác giả trong nước như Lê Thị Hà, Nguyễn Ngọc Huyền, Nguyễn Tiên Khiêm, Vũ Thị An Ninh và Bùi Văn Tuyền.

Trong khuôn khổ đề án này, đối tượng nghiên cứu tập trung là trục tròn có cơ tính biến đổi theo phương ngang và chịu ảnh hưởng của tải trọng động. Ngoài quy luật hàm số lũy thừa, các quy luật phân bố khác như hàm mũ và hàm Sigmoid cũng đã được một số tác giả quan tâm và ứng dụng trong mô hình hóa vật liệu FGM. Việc phân tích trục FGM với các quy luật này về cơ bản tương đồng với phân tích trục tròn FGM, nơi các đặc tính vật liệu thay đổi liên tục theo một hướng nhất định.

Trong phạm vi đề án, trục tròn FGM được giả thiết có cơ – lý tính chỉ thay đổi theo phương ngang và được gọi là “trục 1D-FGM”. Trường hợp phức tạp hơn, khi đặc tính vật liệu thay đổi theo cả hai hướng – phương ngang và dọc trục – được định nghĩa là “trục 2D-FGM”, tuy nhiên chưa được đề cập trong nghiên cứu này. Việc mở rộng nghiên cứu sang trục 2D-FGM là định hướng phát triển trong tương lai. Một số nghiên cứu trong và ngoài nước đã bước đầu khảo sát dầm 2D-FGM có cơ tính biến đổi theo chiều cao và chiều dài bằng quy luật hàm lũy thừa. Ngoài ra, hướng nghiên cứu về vật liệu FGM đa pha (ba pha trở lên) tuy có tiềm năng nhưng hiện tại còn ít được quan tâm và chưa được khai thác sâu.

1.2. Bài toán ứng xử động lực học cho trục tròn

Trục tròn là một phần tử kết cấu phổ biến trong nhiều hệ thống cơ khí và kỹ thuật, từ máy móc công nghiệp cho đến các thiết bị trong ngành hàng không vũ trụ. Việc hiểu rõ đặc tính động lực học của trục tròn, đặc biệt là trong điều kiện chịu tải

trọng động, có vai trò then chốt trong việc đảm bảo hiệu quả hoạt động và độ bền kết cấu của toàn hệ thống. Bài toán động lực học của trục tròn thường bao gồm phân tích dao động tự do và dao động cưỡng bức dưới các điều kiện biên và tải trọng khác nhau.

So với trục tròn sử dụng vật liệu thuần nhất, trục tròn được chế tạo từ vật liệu có cơ tính biến đổi (Functionally Graded Materials – FGM) được xem là một giải pháp nâng cao hiệu suất và tuổi thọ làm việc nhờ khả năng thích ứng tốt hơn với môi trường làm việc khắc nghiệt và tải trọng phức tạp. Trục FGM thể hiện khả năng phân bố ứng suất tối ưu hơn và giảm thiểu hiện tượng tập trung ứng suất, từ đó cải thiện độ bền và ổn định động học của kết cấu.

Phân tích ứng xử động lực học của trục tròn thường dựa trên mô hình các phương trình vi phân xuất phát từ lý thuyết dầm Euler–Bernoulli hoặc Timoshenko. Các mô hình này cho phép mô tả biến dạng và dao động của trục dưới ảnh hưởng của tải trọng động. Khi xét đến vật liệu FGM, các tính chất cơ học như mô-đun đàn hồi, khối lượng riêng và mô-đun cắt có thể được giả định biến đổi theo không gian – chẳng hạn theo bán kính hoặc chiều dài trục – để phản ánh đúng bản chất vật liệu. Trong phạm vi nghiên cứu này, đối tượng được khảo sát là trục tròn FGM có đặc tính cơ lý biến đổi theo phương ngang (tức theo bán kính trục).

1.3. Ứng dụng thực tế

Việc ứng dụng trục làm từ vật liệu có cơ tính biến đổi (FGM) hiện đang được quan tâm rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp nhờ khả năng thích nghi với tải trọng phức tạp và điều kiện làm việc khắc nghiệt. Trong lĩnh vực công nghệ ô tô, trục truyền động là một bộ phận then chốt, chịu tải trọng động lớn trong quá trình vận hành. Phân tích ứng xử động lực học của trục truyền động giúp dự đoán, kiểm soát dao động, giảm rung động và tiếng ồn, từ đó nâng cao độ bền và hiệu suất làm việc. Việc ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) cho phép các kỹ sư mô phỏng chính xác điều kiện làm việc thực tế, tối ưu hóa thiết kế và nâng cao chất lượng vận hành của hệ thống truyền động.

Trong ngành hàng không – vũ trụ, các bộ phận quay như trục cánh quạt và trục động cơ thường chịu tải trọng động lớn và biến thiên liên tục. Phân tích dao động và ổn định động học của các trục này là yếu tố then chốt nhằm đảm bảo độ tin cậy và an toàn bay. Các bài toán động học phức tạp trong môi trường phi tuyến và chịu nhiều điều kiện biên có thể được giải quyết bằng các phương pháp số hiện đại, hỗ trợ thiết kế tối ưu cho các kết cấu quay trong điều kiện bay thực tế.

Đối với ngành công nghiệp chế tạo máy, trục chính của các máy công cụ yêu cầu độ cứng cao, khả năng chịu tải lớn và độ chính xác ổn định trong suốt quá trình gia công. Việc nghiên cứu động lực học của trục chính góp phần quan trọng trong việc nâng cao độ chính xác, giảm sai số và kéo dài tuổi thọ thiết bị. Bằng cách kết hợp các phương pháp phân tích giải tích và mô phỏng số, các kỹ sư có thể đánh giá và cải tiến thiết kế trục để đáp ứng các yêu cầu kỹ thuật khắt khe của ngành công nghiệp hiện đại.

Tổng thể, phân tích động lực học của trục tròn – đặc biệt là trục FGM – đóng vai trò then chốt trong cơ học ứng dụng, với khả năng mở rộng ra nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác nhau. Việc ứng dụng hiệu quả các phương pháp phân tích tiên tiến, bao gồm mô hình hóa số và giải tích, không chỉ nâng cao hiệu suất kết cấu mà còn góp phần thúc đẩy đổi mới trong thiết kế kỹ thuật và phát triển công nghệ cao.

1.4. Các nghiên cứu về dầm, trục FGM trên thế giới

Các nghiên cứu về dầm và trục sử dụng vật liệu có cơ tính biến đổi (FGM) hiện nay chủ yếu tập trung vào phân tích ứng xử cơ học dưới các dạng tải trọng khác nhau. Tuy nhiên, vấn đề liên quan đến xác định vị trí mặt trung hòa trong dầm hoặc trục FGM vẫn chưa được nghiên cứu một cách toàn diện. Đối với trục tròn FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang và sự phân bố hai pha vật liệu là đối xứng, mặt trung hòa thường được giả định nằm tại tâm tiết diện tròn – vị trí có sự cân bằng về cơ học giữa hai vật liệu.

Nhật Bản – quốc gia tiên phong trong lĩnh vực FGM – đã có nhiều đóng góp quan trọng, cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm. Các nhà nghiên cứu tại đây đã phát

triển nhiều mô hình toán học và thử nghiệm để phân tích ứng xử cơ học của dầm và trục FGM, đặc biệt là trong môi trường chịu ảnh hưởng đồng thời của tải trọng nhiệt và cơ. Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) được ứng dụng phổ biến nhằm mô phỏng sự phân bố ứng suất và biến dạng trong các kết cấu sử dụng FGM.

Tại Hoa Kỳ, các nghiên cứu về dầm FGM tập trung chủ yếu vào các ứng dụng trong lĩnh vực hàng không – vũ trụ. Các mô hình phân tích đã được phát triển để dự đoán độ bền, tuổi thọ và mức độ hư hỏng của các cấu trúc FGM khi làm việc trong điều kiện khắc nghiệt. FEM tiếp tục là công cụ chủ đạo trong việc mô phỏng các hiện tượng hư hỏng, biến dạng và mất ổn định của dầm, trục FGM.

Trong khi đó, các nghiên cứu tại châu Âu đóng góp mạnh mẽ vào việc phát triển các phương pháp tính toán tiên tiến, bao gồm phương pháp phần tử biên (BEM) và phần tử hữu hạn không lưới (Meshfree FEM), nhằm mô phỏng chính xác các hành vi phi tuyến và điều kiện biên phức tạp trong các kết cấu FGM.

Tổng quan các nghiên cứu trên thế giới cho thấy mặc dù hướng tiếp cận và ứng dụng đa dạng, song hai nhóm phương pháp chính được sử dụng rộng rãi là: (1) phương pháp giải tích và (2) phương pháp số. Trong nghiên cứu dầm hoặc trục 1D-FGM – nơi vật liệu có cơ tính biến đổi theo phương ngang và tiết diện không đổi – các hệ số trong phương trình vi phân cân bằng hoặc chuyển động là hằng số, do đó phương pháp giải tích vẫn có thể áp dụng hiệu quả tương tự như với dầm thuần nhất. Điều này tạo điều kiện thuận lợi cho việc khai thác các nghiệm chính xác và hiểu sâu hơn về cơ chế ứng xử của kết cấu FGM.

1.4.1. Phương pháp giải tích

Trong nghiên cứu dầm có cơ tính biến đổi (Functionally Graded Materials – FGM), phương pháp giải tích đã được nhiều tác giả sử dụng để xây dựng nghiệm chính xác cho các bài toán dao động, uốn và ổn định. Aydogdu và Taskin sử dụng phương pháp biểu diễn nghiệm dạng Navier để thu nhận tần số và dạng mode dao động của dầm FGM tựa đơn, với tính chất vật liệu biến đổi theo quy luật hàm số lũy

thừa hoặc hàm mũ, trên cơ sở lý thuyết dầm Euler–Bernoulli và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao.

Benatta và cộng sự [3] phát triển nghiệm giải tích cho bài toán uốn của dầm Euler–Bernoulli và Rayleigh FGM có xét đến ảnh hưởng của hiện tượng oằn tiết diện. Trong [4], một phương pháp giải tích mới được đề xuất để phân tích dao động riêng, phân bố ứng suất và lan truyền sóng trong dầm FGM có tính chất thay đổi theo chiều cao. Ying và cộng sự [5] sử dụng phương pháp không gian trạng thái để giải hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả dao động tự do và uốn của dầm FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler–Pasternak. Sina và cộng sự [6] cũng sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao để thiết lập phương trình chuyển động và thu nhận nghiệm dao động riêng.

Các mô hình dầm thứ bậc (Hierarchical beam models) được Giunta và cộng sự [7] phát triển cho bài toán dao động tự do của dầm FGM, trong đó các mô hình cổ điển như Euler–Bernoulli và Timoshenko được nhận như trường hợp riêng. Wei và Liu [8] sử dụng phương pháp Ritz–Galerkin để phân tích uốn phi tuyến của dầm Euler–Bernoulli FGM, trong khi Wei và cộng sự [9] áp dụng phương pháp ma trận truyền để khảo sát dao động của dầm FGM có vết nứt chịu tải dọc trục. Phương pháp Galerkin được sử dụng bởi Lai và đồng nghiệp [10] trong phân tích dao động phi tuyến, còn Birsan và cộng sự [11] đưa ra biểu thức giải tích cho hệ số hữu hiệu của dầm sandwich FGM có lõi xốp. Liu và Shu [12] nghiên cứu ảnh hưởng của sự tách lớp đến dao động của dầm FGM biến đổi theo hàm lũy thừa.

Ảnh hưởng của nhiệt độ đến ứng xử của dầm FGM cũng được phân tích bằng phương pháp giải tích. Kiani và Eslami [13] xây dựng nghiệm giải tích cho bài toán mất ổn định nhiệt của dầm Euler–Bernoulli FGM với các điều kiện biên khác nhau. Mahi và cộng sự [14] sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao để phân tích dao động chịu ảnh hưởng nhiệt. Lý thuyết biến dạng trượt bậc ba được Shi đề xuất và áp dụng bởi Wattanasakulpong và cộng sự [15] trong bài toán ổn định nhiệt và dao động tự do. Ma và Lee [16], Eroglu [17] và các tác giả [18–20] đều nghiên cứu ảnh hưởng

của môi trường nhiệt đến dao động và va đập của dầm FGM. Ghiasian và cộng sự [21] sử dụng phương pháp Galerkin để phân tích mất ổn định tĩnh và động của dầm Euler–Bernoulli FGM chịu nhiệt độ tăng đều.

Trong các nghiên cứu về đáp ứng động lực học, Apetre và cộng sự [22] sử dụng phương pháp Galerkin để khảo sát va đập tốc độ thấp trên dầm sandwich lõi FGM. Simsek và Kocaturk [23] áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange để phân tích dao động dầm Euler–Bernoulli FGM với vật liệu biến đổi theo chiều cao, chịu tải điều hòa di động. Yang và cộng sự [24] thu nhận nghiệm dao động và võng động lực học cho dầm FGM có vết nứt và biến đổi theo quy luật hàm mũ.

1.4.1.1. Phương pháp CPVP

Phương pháp cầu phương vi phân (CPVP-“Differential Quadrature Method”) là một kỹ thuật số hiệu quả được Bert và cộng sự bắt đầu phát triển từ 1970 [25], ban đầu nhằm giải quyết các dạng bài toán biên và giá trị ban đầu. Nhờ khả năng rời rạc hóa chính xác các đạo hàm bậc cao với số điểm lưới tương đối ít, phương pháp này đã được nhiều nhà nghiên cứu kế thừa và mở rộng để giải quyết các bài toán trong cơ học dầm, đặc biệt là dầm FGM một chiều (1D-FGM).

Komijani và cộng sự [26] đã áp dụng CPVP để rời rạc hóa các phương trình chuyển động trong các dạng đề bài dao động ổn định và đề bài về dao động phi tuyến của dầm Timoshenko vi mô làm từ vật liệu FGM. Trong nghiên cứu này, ảnh hưởng của nhiệt độ và nền đàn hồi (Winkler hoặc Pasternak) được tích hợp vào mô hình để đánh giá lực tới hạn và tần số dao động riêng.

Jin và Wang [27] sử dụng phương pháp CPVP để xây dựng ma trận độ cứng và khối lượng trong phân tích nghiên cứu dao động tự do của dầm FGM. Các kết quả thu được cho thấy hiệu quả của CPVP trong việc mô phỏng chính xác dao động với số phần tử lưới ít.

Trong nghiên cứu của Ebrahimi và cộng sự [28], phương trình chuyển động của dầm Euler–Bernoulli FGM chứa lỗ rỗng vi mô được thiết lập trong môi trường

hiệu ứng nhiệt độ, sau đó được giải quyết bằng phương pháp CPVP. Các nhà nghiên cứu đã chỉ ra rằng sự hiện diện của các lỗ rỗng và trường nhiệt độ phân bố không đều ảnh hưởng đáng kể đến tần số dao động riêng, cũng như đến hiện tượng mất ổn định phi tuyến của dầm Timoshenko FGM.

1.4.1.2. Phương pháp PTHH

Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – PTHH) với ưu thế nổi bật trong việc rời rạc hóa các miền không gian phức tạp, đã được áp dụng rộng rãi trong phân tích kết cấu FGM. Trên cơ sở kiến thức phương pháp Lagrange toàn phần, Agarwal và cộng sự [29] xây dựng mô hình phần tử dầm để phân tích ảnh hưởng của phi tuyến hình học đến ứng xử động lực học của dầm composite và dầm FGM. Phần tử được xây dựng sử dụng nghiệm của phương trình vi phân cân bằng tĩnh để nội suy trường chuyển vị, giúp khắc phục hiện tượng nghẽn trượt (shear locking) và đạt tốc độ hội tụ nhanh.

Dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc ba, Kadoli và cộng sự [30] giả thuyết góc quay của pháp tuyến và góc trượt là các biến độc lập, từ đó thiết lập hai ma trận độ cứng để phân tích ứng xử tĩnh của dầm FGM. Kết quả chỉ ra rằng ứng suất và độ võng thu được có sự khác biệt rõ rệt khi tải trọng tác dụng lên mặt gốm so với mặt kim loại.

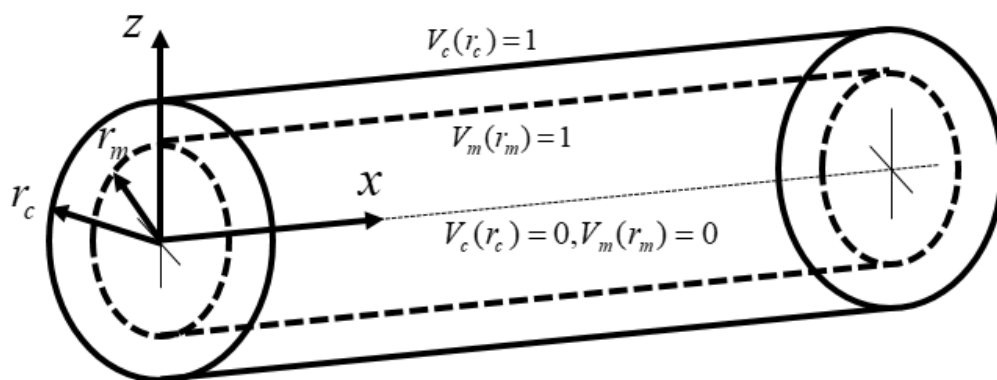
Alshorbagy và cộng sự [31] sử dụng mô hình phần tử hai nút theo lý thuyết Euler–Bernoulli để tính tần số dao động và mode dao động của dầm FGM có tính chất vật liệu biến đổi theo chiều cao hoặc dọc trục. Mohanty và cộng sự [32] phát triển phần tử dầm dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất để khảo sát ảnh hưởng của nền đàn hồi Winkler đến ổn định của dầm sandwich FGM. De Pietro và cộng sự [33] xây dựng mô hình phần tử cho dầm không gian FGM sử dụng lý thuyết dầm thứ bậc kết hợp với hàm nội suy Lagrange có độ chính xác cao.

Phương pháp PTHH cũng được áp dụng để đánh giá ảnh hưởng của trường nhiệt độ đến ứng xử động lực học khi chịu dao động cưỡng bức của dầm FGM. Trong [34], Chakraborty và cộng sự sử dụng nghiệm của phương trình vi phân cân bằng tĩnh

để nội suy trường chuyển vị của dầm Timoshenko khi xây dựng ma trận độ cứng và khối lượng, nhằm nghiên cứu bài toán truyền sóng trong dầm đa lớp với lõi là FGM. Tuy nhiên, mô hình này chưa xét đến ảnh hưởng của sự phụ thuộc nhiệt độ lên tính chất vật liệu.

Bhangale và Ganesan [35] khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ đến tần số dao động riêng và hệ số hao phí của dầm nhiều lớp FGM có lõi là vật liệu nhớt đàn hồi bằng phương pháp PTHH. Kết quả cho thấy, hệ số hao phí tăng lên đáng kể khi tỷ số giữa chiều dày lớp lõi và chiều cao của dầm tăng.

Ngoài các nghiên cứu về dầm, một số tác giả cũng đã tiếp cận bài toán rung động của trục tròn FGM. Cụ thể, Rao và cộng sự [36] áp dụng phương trình Lagrange để phân tích dao động của trục làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên, với mục tiêu giảm rung trong các hệ thống máy móc năng suất cao dùng trong công nghiệp. Đây là một hướng nghiên cứu tiềm năng, đặc biệt trong tình trạng thực tế yêu cầu về hiệu suất cao và độ tin cậy của thiết bị cơ khí ngày càng khắt khe.



Hình 1.1. Mô hình trục FGM hai pha

Phân tích tính toán động lực học của trục tròn FGM được thực hiện bằng phương pháp phần tử quang phổ (Spectral Element Method – SEM), một phương pháp số có độ hội tụ cao trong mô phỏng dao động. Minwoo Hong và Usik Lee [37] đã áp dụng SEM để xây dựng mô hình động học chính xác cho trục quay có cơ tính

biến thiên, cho phép thu nhận các nghiệm dao động với độ chính xác khá cao so với các phương pháp phần tử rời rạc truyền thống trong các bài toán tuyến tính và phi tuyến tính.

Bên cạnh đó, phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) (Finite Element Method – FEM) vẫn giữ vai trò chủ đạo trong phân tích trục FGM nhờ tính linh hoạt và khả năng xử lý các điều kiện biên phức tạp. Abdelkrim Boukhalfa [38] đã giới thiệu biến thể “p-version” của FEM, trong đó thay vì tinh chỉnh lưới bằng cách chia nhỏ phần tử (hướng tiếp cận của h-version), phương pháp này tập trung vào việc nâng cao bậc đa thức xấp xỉ bên trong từng phần tử.

Việc tăng bậc hàm cơ sở cho phép mô hình hóa chi tiết các biến đổi trường vật lý trong mỗi phần tử mà không cần chia nhỏ lưới, giúp cải thiện đáng kể độ chính xác của nghiệm thu được. Cách tiếp cận này đặc biệt hiệu quả khi mô phỏng các hành vi phi tuyến hoặc biến thiên nhanh của vật liệu FGM trong phạm vi một phần tử duy nhất.

1.5. Những nghiên cứu về dầm FGM trong nước

Tại Việt Nam, nhiều công bố khoa học đã tập trung vào phân tích động lực học của dầm FGM dưới các điều kiện làm việc phức tạp như chịu tải trọng di động, nhiệt độ môi trường và sự biến đổi của vật liệu theo không gian.

Tại Đại học Công nghiệp Hà Nội, TS. *Nguyễn Văn Luật* và cộng sự [39] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để xây dựng mô hình dầm với ba chuyển vị nút nhằm khảo sát ứng xử của dầm chịu đồng thời nhiều tải trọng di động và ảnh hưởng của trường nhiệt độ. Mô hình được xây dựng dựa trên nguyên lý năng lượng cực tiểu, với hàm nội suy Kosmatka được lựa chọn nhằm phù hợp với đặc tính biến dạng của dầm, từ đó thực hiện so sánh với mô hình dầm Bernoulli truyền thống.

Luận án tiến sĩ của *Lê Thị Hà* [40] với đề tài “Phân tích kết cấu dầm FGM có mặt cắt ngang thay đổi dưới ảnh hưởng của tải trọng di động” đã áp dụng phương

pháp số để phân tích làm rõ tác động của sự phân bố vật liệu theo phương ngang đến ứng xử của kết cấu chịu tải di động biến thiên theo thời gian và không gian.

Trong nghiên cứu luận án của *Trần Thị Thơm* [41], với đề tài “Mô hình phần tử hữu hạn trong phân tích dao động của dầm có cơ tính biến đổi theo hai chiều”, tác giả đã phát triển mô hình PTHH (phần tử hữu hạn) dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko để khảo sát ứng xử dao động của dầm FGM có cơ tính vật liệu biến thiên đồng thời theo hai phương (chiều dài và chiều cao).

Đáng chú ý, *Bùi Văn Tuyền* [42] trong luận án đánh giá tiến sĩ ngành Kỹ thuật Cơ khí và Cơ Kỹ thuật với đề tài “Dao động của dầm FGM có lỗ rỗng vi mô trong môi trường nhiệt độ chịu tải trọng di động” đã kết hợp giữa phương pháp giải tích cổ điển và PPPTHH (phương pháp phần tử hữu hạn) để xây dựng và giải hệ phương trình vi phân chuyển động. Kết quả nghiên cứu làm rõ ảnh hưởng đồng thời của nhiệt độ và các lỗ rỗng vi mô tới các đặc điểm dao động của dầm FGM, đóng góp trong nâng cao độ chuẩn xác của các mô hình dự báo trong thực tiễn thiết kế kết cấu.

Các công trình nghiên cứu trong nước đã tập trung vào phân tích ứng xử cơ học và động lực học của dầm FGM dưới các điều kiện làm việc khác nhau như chịu tải dọc trục, tải di động, môi trường nhiệt độ, và mất ổn định kết cấu.

Nhiều tác giả trong nước khác cũng đã đóng góp đáng kể cho lĩnh vực này. Nguyễn Trung Kiên [43] đã sử dụng phương pháp giải tích để phân tích uốn và dao động của dầm Timoshenko FGM phân bố cơ tính theo phương ngang. Tương tự, Thái Hữu Tài và Võ Phương Thức [44] ứng dụng lý thuyết dầm bậc cao để mở rộng nghiên cứu với các điều kiện tải đặc biệt. Lấy lý thuyết biến dạng trượt bậc ba làm cơ sở, Võ Phương Thức cùng cộng sự [45] đã dựng mô hình FEM cho dầm sandwich FGM với lõi đồng nhất để xác định tần số dao động và dạng mode. Mô hình này sau đó tiếp tục được cải tiến và mở rộng trong các nghiên cứu tiếp theo [46].

Trình và cộng sự [47] tiếp tục triển khai mô hình giải tích để khảo sát dao động và mất cân bằng của dầm FGM khi đồng thời chịu ảnh hưởng của cơ tải và tải nhiệt.

Các kết quả này đã được Nguyễn Đình Kiên kế thừa và phát triển, đặc biệt trong các nghiên cứu về chuyển vị lớn của khung FGM [48] và khung sandwich FGM [49].

Trong những năm trước, Trịnh Thanh Hương và Nguyễn Đình Kiên [50, 51] đã phát triển mô hình phần tử hữu hạn để khảo sát ảnh hưởng của biến dạng dẻo đến ổn định kết cấu và ứng xử phi tuyến của dầm FGM với phân bố vật liệu theo phương ngang.

Trong các nghiên cứu về đáp ứng động dưới tải di động, Lê Thị Hà [40] đã xây dựng mô hình FEM dựa trên hai lý thuyết về dầm Euler–Bernoulli và biến dạng trượt bậc nhất, qua đó chỉ ra rằng ảnh hưởng của vị trí trục trung hòa đến tần số dao động riêng là đáng kể, nhưng có thể được đơn giản hóa trong phân tích độ võng biến dạng.

Bùi Văn Tuyền [42] cùng Nguyễn Đình Kiên [52] tiếp tục nghiên cứu dao động tự do và dao động cưỡng bức của dầm Timoshenko FGM có lỗ rỗng trong môi trường nhiệt, với mô hình phần tử được cải tiến nhờ bổ sung điều kiện ràng buộc về biến dạng trượt để tăng độ chính xác tính toán.

Trong khi các kết quả nghiên cứu về dầm 1D-FGM đã phát triển khá đầy đủ, các công trình về 2D-FGM trong nước vẫn còn hạn chế. Một ví dụ đáng chú ý là nghiên cứu của Đỗ Văn Thơm và cộng sự [53], trong đó nhóm tác giả sử dụng mô hình phần tử hữu hạn để khảo sát ứng xử ổn định và độ uốn của tấm 2D-FGM ba pha vật liệu, có phân bố theo quy luật hàm lũy thừa. Mô hình sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc ba cải tiến theo đề xuất của Shi [54], giúp xác định tải trọng tới hạn và phân bố ứng suất trong tấm theo các tỷ lệ hình học khác nhau.

Ngoài ra, Trịnh và cộng sự [55] ứng dụng nguyên lý Hamilton kết hợp với lý thuyết ứng suất cặp cải tiến (Modified Couple Stress Theory) để nghiên cứu về dao động của dầm micro 2D-FGM, trong đó vật liệu biến đổi đồng thời theo chiều dài và chiều cao theo mô hình hàm mũ. Kết quả thu được cho thấy sự khác biệt đáng kể về tần số và mode dao động giữa kết cấu micro và macro truyền thống.

1.6. Định hướng nghiên cứu

Trong những năm gần đây, các công trình nghiên cứu liên quan đến dầm FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang đã được công bố khá phong phú trên các tạp chí khoa học và luận văn chuyên ngành. Tuy vậy, đối với trường hợp trục tròn có cơ tính biến đổi theo phương ngang, số lượng nghiên cứu vẫn còn hạn chế. Đặc điểm hình học dạng tròn kết hợp với sự không đồng nhất của vật liệu làm cho việc thiết lập mô hình toán học trở nên phức tạp, bởi các tham số trong phương trình vi phân chuyển động không còn là hằng số, khiến các phương pháp giải tích truyền thống gặp nhiều khó khăn khi áp dụng. Trước thực tế đó, đề tài lựa chọn phương pháp phần tử hữu hạn làm công cụ tính toán chủ đạo để tiếp cận và giải bài toán.

Mục tiêu của luận án là phát triển mô hình phần tử hữu hạn nhằm nghiên cứu ứng xử động lực học của trục tròn có cơ tính biến đổi theo phương ngang, chịu ảnh hưởng của tải trọng động. Trên cơ sở đó, luận án đề xuất các hướng triển khai cụ thể như sau:

- Xây dựng công thức phần tử hữu hạn cho trục FGM thông qua việc lựa chọn hàm dạng nội suy phù hợp, từ đó xây dựng nên biểu thức cho ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc-tơ lực nút, phản ánh đúng sự biến đổi liên tục của vật liệu theo bán kính.
- Lựa chọn thuật toán tính toán trong miền thời gian để giải hệ phương trình chuyển động thu được từ mô hình phần tử hữu hạn. Trên cơ sở đó, xây dựng chương trình tính toán số và kiểm chứng độ chính xác thông qua so sánh với các kết quả trong tài liệu tham khảo hoặc phần mềm chuyên dụng.
- Thực hiện phân tích các đặc trưng dao động của hệ như tần số dao động riêng, phân bố ứng suất theo chiều dày trục, và đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố như tham số vật liệu, chiều dài trục, tải trọng ảnh hưởng đến đáp ứng động học.

- Tiến hành mô phỏng trên các bài toán cụ thể bằng phần mềm thương mại (như ANSYS), sau đó đối chiếu với kết quả thu được từ chương trình tính toán đã xây dựng, nhằm đánh giá độ tin cậy và khả năng áp dụng của mô hình lý thuyết.

1.7. Điểm mới của luận án

Mô hình dầm FGM có biên dạng đặc biệt : “ chi tiết dạng trục tròn” có mặt cắt ngang thay đổi theo trục. Chi tiết nghiên cứu là chi tiết dạng trục tròn được nghiên cứu dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích cải thiện công thức PTHH

Sử dụng mô hình để mô phỏng chi tiết nghiên cứu độ tin cậy của phương pháp tính toán của đề án đã nghiên cứu trước đó.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Chương 1 của luận án đã trình bày khái quát về đề tài “Nghiên cứu mô phỏng số ứng xử động lực học của chi tiết dạng trục tròn có cơ tính thay đổi theo phương ngang”. Nội dung chương tập trung tổng hợp và phân tích tình hình nghiên cứu liên quan đến dầm và trục FGM trong nước cũng như trên thế giới. Các công trình tiêu biểu được phân loại theo hai hướng tiếp cận chính: phương pháp giải tích và phương pháp số. Qua quá trình phân tích, có thể nhận thấy rằng phương pháp số, đặc biệt là phương pháp phần tử hữu hạn, tỏ ra phù hợp và có tính khả thi cao khi ứng dụng vào bài toán nghiên cứu trong đề tài. Trên cơ sở tổng quan đó, luận án đã xác định rõ mục tiêu, phạm vi và định hướng triển khai các vấn đề nghiên cứu trọng tâm trong các chương tiếp theo.

CHƯƠNG 2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO TRỤC TRÒN FGM

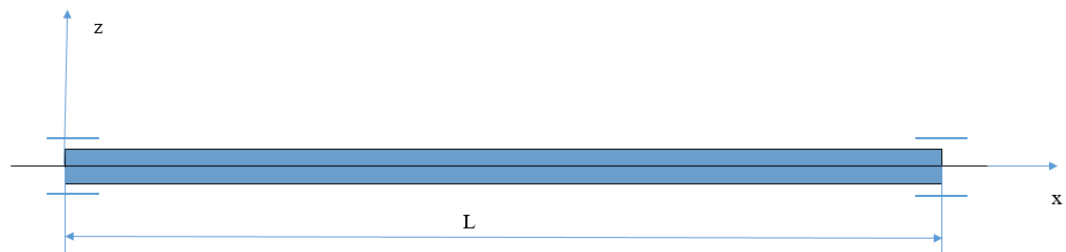
Nội dung chương 2 sẽ tiến hành thiết lập hệ phương trình phần tử hữu hạn cơ sở cho bài toán trục tròn có đặc tính vật liệu biến thiên theo phương ngang. Việc xây dựng mô hình được thực hiện trên cơ sở các giả thiết biến dạng khác nhau trong lý thuyết dầm, trong đó trọng tâm là giả thiết dầm Euler–Bernoulli, còn được biết đến như là lý thuyết dầm cổ điển. Đồng thời, yếu tố ảnh hưởng của biến dạng đến vị trí trục trung hòa sẽ được đưa vào trong quá trình thiết lập biểu thức năng lượng, từ đó làm nền tảng để phát triển mô hình toán học cho bài toán dao động của trục FGM..

2.1. Tính chất vật liệu FGM

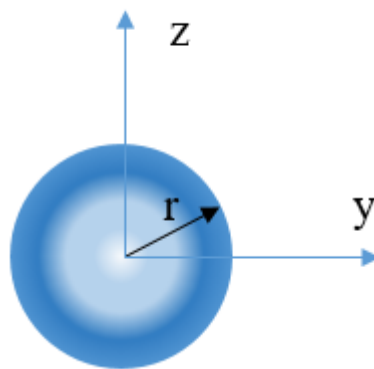
Trong miền làm việc đàn hồi, các đặc tính hiệu dụng của vật liệu FGM có thể được ước lượng thông qua các mô hình cơ học vi mô. Hai phương pháp được áp dụng phổ biến hiện nay là mô hình Voigt và mô hình Mori–Tanaka. Trong đó, mô hình Mori–Tanaka có ưu điểm về độ chính xác cao hơn khi phân tích ứng xử hư hỏng của kết cấu FGM, tuy nhiên đòi hỏi xử lý toán học phức tạp hơn. Ngược lại, mô hình Voigt có hình thức đơn giản hơn và thường được sử dụng khi yêu cầu phân tích chủ yếu tập trung vào đặc trưng đàn hồi – động học, bởi vì sai khác giữa hai mô hình trong trường hợp này là không đáng kể. Do vậy, luận án lựa chọn sử dụng mô hình Voigt để mô tả và tính toán các tính chất hiệu dụng của trục FGM trong quá trình khảo sát dao động.

2.1.1. Mô hình trục tròn 1D-FGM

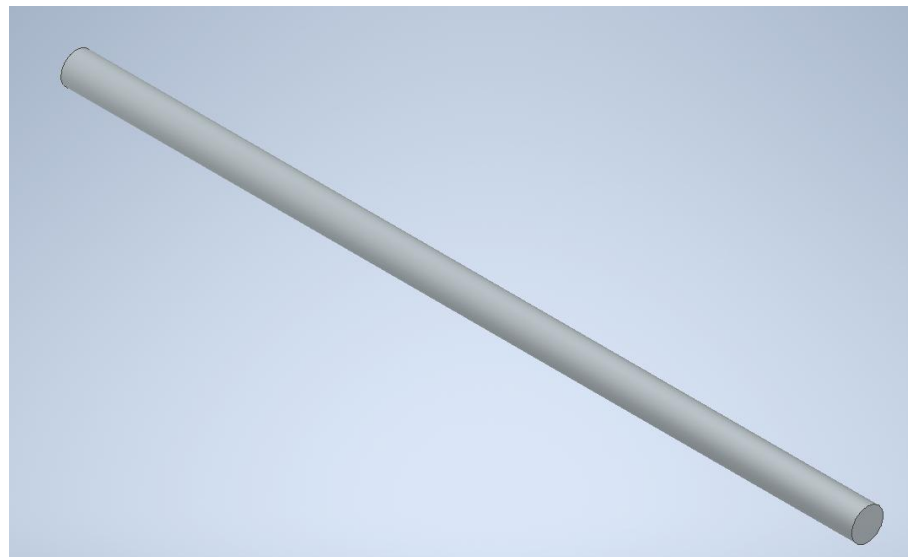
Hình 2.1 biểu diễn mô hình hình học của chi tiết trục tròn trong hệ tọa độ Oxyz, trong đó O là gốc tọa độ được đặt tại đầu trái của trục. Trục Ox trùng với trục trung hòa của trục dọc theo chiều dài, còn trục Oz vuông góc với mặt phẳng trung hòa, hướng theo chiều bán kính. Chiều dài của trục được ký hiệu là L và mặt cắt ngang có dạng hình tròn với bán kính R . Các hình minh họa 2.1, 2.2 và 2.3 lần lượt thể hiện hình học tổng quát của trục tròn, cấu trúc vật liệu, và hướng biến đổi cơ tính. Tất cả các công thức và biểu thức phân tích trình bày trong phần tiếp theo đều áp dụng cho loại kết cấu trục tròn như mô tả trong các hình này.



Hình 2.1. Mô hình trục FGM



Hình 2.2. Mặt cắt mô hình của trục FGM



Hình 2.3. Mô hình 3D trục tròn FGM

Do mặt cắt tròn đối xứng qua các trục tọa độ với x là trùng với phương của trục tròn, trục y, z bất kỳ đi qua tâm của mặt cắt, tính chất đàn hồi của vật liệu 2 pha được xác định theo chiều ngang có thể xem là hàm của r được cho bởi công thức:

Từ công thức (2.1) ta đưa ra được các công thức của trục tròn FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang:

$$\begin{cases} E(r) = E_m V_m(r) + E_c V_c(r) \\ G(r) = G_m V_m(r) + G_c V_c(r) \\ \rho(r) = \rho_m V_m(r) + \rho_c V_c(r) \end{cases} \quad (2.1)$$

Với E_c, E_m lần lượt là modul đàn hồi thể tích của pha c và pha m

G_c, G_m lần lượt là modul đàn hồi trượt của pha c và pha m

ρ_c, ρ_m lần lượt là khối lượng riêng của pha c và pha m

V_c, V_m là tỷ lệ thể tích các pha c và m tương ứng, được cho dưới dạng:

$$V_m(r) = \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n, \quad 0 \leq r \leq R, \quad V_c(r) + V_m(r) = 1 \quad (2.2)$$

Trong đó k, n (không âm) là tham số vật liệu đặc trưng cho sự phân bố tỉ lệ thể tích các vật liệu thành phần theo bán kính trục trong, R là bán kính của trục. Từ (2.1) và (2.2) tại tâm của trục ($r=0$) thì vật liệu thuần túy là pha m, tại bề mặt trục ($r=R$) thì vật liệu thuần túy là pha c.

2.1.2. Lý thuyết nghiên cứu về trục

Trong phân tích trục, ba lý thuyết thường được áp dụng phổ biến là: lý thuyết dầm Euler–Bernoulli (còn gọi là lý thuyết dầm cổ điển – CBT), lý thuyết dầm Timoshenko (hay lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất – FSDT), và các lý thuyết biến dạng bậc cao.

Lý thuyết dầm cổ điển được phát triển bởi Euler và Bernoulli từ khoảng giữa thế kỷ 18, và đã trở thành nền tảng cơ bản cho nhiều bài toán cơ học kết cấu. Sau này, lý thuyết này được ứng dụng rộng rãi trong thiết kế kết cấu xây dựng và các công trình kỹ thuật dân dụng, đặc biệt là trong thời kỳ phát triển mạnh mẽ của ngành xây dựng kết cấu thép, tiêu biểu như tháp Eiffel.

Giả thiết trung tâm của lý thuyết Euler–Bernoulli cho rằng: “Một mặt cắt ngang của dầm, trước biến dạng là phẳng và vuông góc với trục trung hòa, sau biến dạng vẫn giữ nguyên tính chất đó – tức vẫn phẳng và vuông góc với trục trung hòa.” Giả thiết này bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, do đó phù hợp hơn với các kết cấu có chiều dày nhỏ và chịu tải chậm, nơi hiệu ứng trượt không đáng kể. Chi tiết dạng trục tròn được mô hình hóa như một dầm Timoshenko (hay lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất) với quán tính quay và hiệu ứng con quay hồi chuyển được sử dụng. Trục quay với tốc độ không đổi quanh trục tâm của nó. Trục có mặt cắt ngang dạng tròn đồng nhất. Trường dịch chuyển được giả định bằng cách chọn trục tọa độ x trùng với trục tâm

Sử dụng giả thuyết Euler-Bernoulli cho dạng trục tròn trong luận án :

$$\begin{cases} \bar{u}(x, z, t) = u(x, t) - z\varphi(x, t) \\ \omega(x, z, t) = \omega(x, t) \\ \varphi = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \omega_{,x}, \phi = \phi(x, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

$\bar{u}$: tương ứng là chuyển vị tại điểm bất kỳ trên phương x

ω : là chuyển dịch tại điểm bất kỳ theo phương z .

u : là chuyển vị bất kỳ theo phương x tại điểm trên mặt trung hòa của trục.

φ : là góc quay của mặt cắt ngang của trục tròn khi chịu uốn.

ϕ : là góc xoắn của trục.

t : là biến thời gian.

Trong biểu thức trên. Ký hiệu $(...)_x$ được dùng để chỉ đạo hàm riêng theo biến x ; $(...)_{,xx}$ là chỉ đạo hàm riêng bậc 2 theo biến x .

Khi đó, các trường biến dạng và ứng suất bên trong trục có dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_{,x} - z \cdot \omega_{,xx} \quad (2.4)$$

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx} = r \theta_{,x} = z \theta_{,x} \quad (2.5)$$

Định luật Hooke:

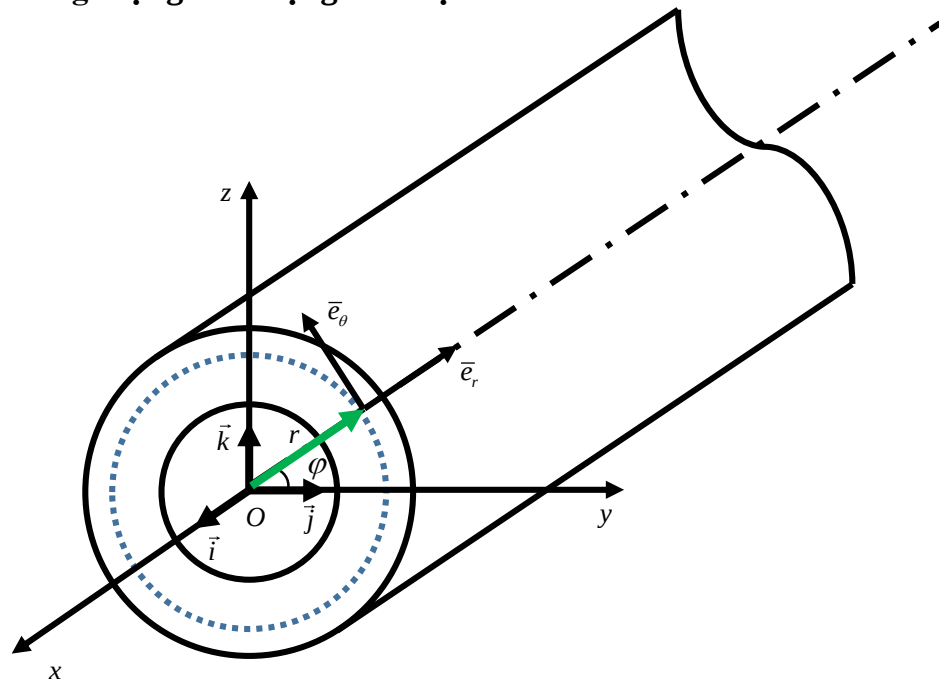
$$\sigma_x = E(r) \cdot \varepsilon_x \quad (2.6)$$

$$\tau_\rho = G(r) \cdot \gamma \quad (2.7)$$

r là khoảng cách từ điểm tính ứng suất bất kỳ tới trục x của trục, γ là góc trượt của trục.

2.2. Phương trình vi phân của trục có cơ tính biến thiên theo phương ngang

2.2.1. Hàm năng lượng biến dạng của trục



Hình 2.4. Biểu diễn mặt cắt của trục

+ Năng lượng đàn hồi của trục trong trường hợp tổng quát xét khi trục chịu uốn và xoắn đồng thời thì hàm năng lượng của trục được xác định dưới dạng :

$$U = U_{uon} + U_{xoan} \quad (2.8)$$

Hàm năng lượng của trục chịu uốn có dạng:

$$\begin{aligned} U_{uon} &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E(z) \varepsilon_x^2 dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left[E(r) u_{,x}^2 - 2E(r) r u_{,x} \omega_{,xx} \sin \theta + E(r) r^2 \omega_{,xx}^2 \sin^2 \theta \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[E(r) u_{,x}^2 - 2E(r) r u_{,x} \omega_{,xx} \sin \theta + E(r) r^2 \omega_{,xx}^2 \sin^2 \theta \right] r dr dx d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_1 u_{,x}^2 + A_2 \omega_{,xx}^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{Trong đó } v_m(r) = \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n, \quad 0 \leq r \leq R, \quad v_c(r) + v_m(r) = 1$$

$$\Rightarrow E(r) = E_m V_m(r) + E_c V_c(r) = [E_m - E_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + E_c$$

$$A_1 = 2\pi \int_0^R E(r) r dr = 2\pi \int_0^R \left\{ [E_m - E_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + E_c \right\} r dr$$

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^R r^3 E(r) dr = \int_0^R \left\{ [E_m - E_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + E_c \right\} r^3 dr$$

Hàm năng lượng của trục chịu xoắn có dạng:

$$U_{xoan} = \frac{1}{2} \int_V \tau_\rho \gamma dV$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow U_{xoan} &= \frac{1}{2} \int_V G(r) \gamma^2 dV = \frac{1}{2} \int_V G(r) r^2 \phi_{,x}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} G(r) r^3 \phi_{,x}^2 dr dx d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L A_3 \phi_{,x}^2 dx
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Với

$$A_3 = 2\pi \int_0^R \left\{ [G_m - G_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + G_c \right\} r^3 dr$$

Từ (2.8), (2.9) và (2.10) ta nhận được hàm năng lượng của trục:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [A_1 u_{,x}^2 + A_2 \omega_{,xx}^2 + A_3 \phi_{,x}^2] dx \tag{2.11}$$

2.2.2. Động năng của trục

Từ biểu thức cho chuyển vị của dầm Timoshenko, hệ phương trình Euler Bernoulli, ta có thể viết động năng cho trục tròn dưới dạng

$$T = T_{uon} + T_{xoan} \tag{2.12}$$

Động năng của trục chịu uốn được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned}
T_{uon} &= \frac{1}{2} \int_V \rho(r) (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A [\rho(r) (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) + \rho(z) z^2 \dot{\phi}^2 - 2z \rho(z) \dot{u} \dot{\phi}] dA dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} [\rho(r) (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) + \rho(r) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - 2z \rho(r) \dot{u} \dot{\phi} \sin \theta] r dr dx d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L [B_1 (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) + B_2 \dot{\phi}^2] dx
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Trong đó

$$v_m(r) = \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n, \quad 0 \leq r \leq R, \quad v_c(r) + v_m(r) = 1$$

$$\Rightarrow \rho(r) = [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c$$

$$B_1 = 2\pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right\} r dr$$

$$B_2 = \pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right\} r^3 dr$$

Động năng của trục chịu xoắn:

$$T_{xoan} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho(r) r^2 \dot{\phi}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L B_3 \dot{\phi}^2 dx$$

$$\text{Với } B_3 = 2\pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right\} r^3 dr$$

Động năng tổng quát của trục

$$T = T_U + T_X = \frac{1}{2} \int_0^L \left[B_1 (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + B_2 \dot{\phi}^2 + B_3 \dot{\phi}^2 \right] dx \quad (2.14)$$

2.2.3. Phương trình chuyển động

Phương trình chuyển động của dầm có thể được thiết lập dựa trên nguyên lý biến phân Hamilton, trong đó xem xét đến năng lượng biến dạng, động năng và công của ngoại lực tác dụng. Nguyên lý Hamilton được phát biểu như sau::

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U - \Pi] dt = 0 \quad (2.15)$$

Với các điều kiện ở hai thời điểm bất kỳ t_1 và t_2

$$\begin{cases} \delta u|_{t_1} = \delta u|_{t_2} = 0 \\ \delta w|_{t_1} = \delta w|_{t_2} = 0 \\ \delta \theta|_{t_1} = \delta \theta|_{t_2} = \delta \varphi|_{t_1} = \delta \varphi|_{t_2} = 0 \end{cases}$$

T là động năng của hệ; U là hàm năng lượng biến dạng; Π là hàm thế năng của các ngoại lực.

Hàm năng lượng đàn hồi của trục có dạng:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L [A_1 u_{,x}^2 + A_2 \omega_{,xx}^2 + A_3 \phi_{,x}^2] dx \\ \rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [A_1 u_{,x} \delta u_{,x} + A_2 \omega_{,xx} \delta \omega_{,xx} + A_3 \phi_{,x} \delta \phi_{,x}] dx dt \\ &= A_1 \int_{t_1}^{t_2} [u_{,x} \delta u]_0^L dt - A_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L u_{,xx} \delta u dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [A_2 \omega_{,xx} \delta \omega]_0^L dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (A_2 \omega_{,xx})_{,x} \delta \omega dx dt + \int_{t_1}^{t_2} [A_3 \phi_{,x} \delta \phi]_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [A_3 \phi_{,x}]_{,x} \delta \phi dx dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_1 u_{,xx} \delta u dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_2 (\omega_{,xx})_{,x} \delta \omega dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_3 [\phi_{,x}]_{,x} \delta \phi dx dt \end{aligned}$$

Biến đổi công thức động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [B_1 (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) + B_2 \dot{\phi}^2 + B_3 \dot{\phi}^2] dx$$

Trong đó:

$$B_1 = 2\pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + \rho_c \right\} r dr$$

$$B_2 = \pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + \rho_c \right\} r^3 dr$$

$$B_3 = 2\pi \int_0^R \left\{ [\rho_m - \rho_c] \left(1 - \frac{r^k}{R^k} \right)^n + \rho_c \right\} r^3 dr$$

$$\rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[B_1 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{\omega} \delta \dot{\omega}) + B_2 \dot{\phi} \delta \dot{\phi} + A_3 \dot{\phi} \delta \dot{\phi} \right] dx dt$$

$$T = \frac{1}{2} A \int_0^L \rho(x) (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) dx + \frac{1}{2} J_y \int_0^L \rho(x) \dot{\phi}^2 dx + \frac{1}{2} J_x \int_0^L \rho(x) \dot{\theta}^2 dx$$

$$\rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[B_1 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{\omega} \delta \dot{\omega}) \right] dx dt + J_y \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) \dot{\phi} \delta \dot{\phi} dx dt + J_x \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(x) \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dx dt$$

$$= \int_0^L \left[B_1 (\dot{u} \delta u + \dot{\omega} \delta \omega) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[B_1 (\ddot{u} \delta u + \ddot{\omega} \delta \omega) \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L B_2 \dot{\phi} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} dx$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L B_2 \ddot{\phi} \delta \phi dx dt + \int_0^L B_3 \dot{\phi} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_3 \ddot{\phi} \delta \phi dx dt$$

$$= - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \left[B_1 (\ddot{u} \delta u + \ddot{\omega} \delta \omega) \right] dx dt - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_2 \ddot{\phi} \delta \phi dx dt - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_3 \ddot{\phi} \delta \phi dx dt$$

Thế năng của các lực ngoài:

$$\Pi = -P \cos \Omega t. \omega \left(\frac{L}{2}, t \right) - R.P \cos \Omega t. \phi \left(\frac{L}{2}, t \right)$$

$$\delta \Pi = -P \cos \Omega t. \delta \omega \left(\frac{L}{2}, t \right) - R.P \cos \Omega t. \delta \phi \left(\frac{L}{2}, t \right)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = - \int_{t_1}^{t_2} -P \cos \Omega t . \delta \omega \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt - R.P \int_{t_1}^{t_2} \cos \Omega t . \delta \phi \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt$$

Với $\underline{\delta}$ là hàm Delta Dirac

Thay vào phương trình Hamilton ta được:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U - \Pi] dt = 0 \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_1 u_{,xx} \delta u . dx . dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_2 \left(\omega_{,xx} \right)_{,x} \delta \phi . dx . dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L A_3 \left[\phi_{,x} \right]_{,x} \delta \phi . dx . dt + \\ & \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \left[B_1 \left(\ddot{u} \delta u + \ddot{\omega} \delta \omega \right) \right] dx dt + \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_2 \ddot{\phi} \delta \phi . dx dt + \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_3 \ddot{\phi} \delta \phi . dx dt + \\ & \int_{t_1}^{t_2} P \cos \Omega t . \delta \omega \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt + R.P \int_{t_1}^{t_2} \cos \Omega t . \delta \phi \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[B_1 \ddot{u} - A_1 u_{,xx} \right] \delta u . dx . dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[B_2 \ddot{\phi} - A_2 \left(\omega_{,xx} \right)_{,x} \right] \delta \phi . dx . dt + \\ & \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \left[B_3 \ddot{\phi} - A_3 \left[\phi_{,x} \right]_{,x} \right] \delta \phi . dx dt + \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} B_1 \ddot{\omega} \delta \omega . dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} P \cos \Omega t . \delta \omega \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt + R.P \int_{t_1}^{t_2} \cos \Omega t . \delta \phi \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) dt = 0 \end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của trục có dạng

$$\begin{cases} B_1 \ddot{u} - A_1 u_{,xx} = 0 \\ B_2 \ddot{\phi} - A_2 \left(\omega_{,xx} \right)_{,x} \\ B_3 \ddot{\phi} - A_3 \left[\phi_{,x} \right]_{,x} = -RP \cos \Omega t . \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) \\ B_1 \ddot{\omega} = P \cos \Omega t . \underline{\delta} \left(\frac{L}{2} - x \right) \end{cases}$$

2.3. Xây dựng công thức PTHH cho trục FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang

2.3.1. Giới thiệu phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn (PPPTHH), hay Finite Element Method (FEM), là một trong những phương pháp tính toán số quan trọng và được ứng dụng rộng rãi nhất trong cơ học kỹ thuật hiện đại. Ra đời từ những năm 1950 trong ngành hàng không và kết cấu, đến nay FEM đã trở thành công cụ phân tích tiêu chuẩn trong nhiều lĩnh vực như cơ học vật rắn, nhiệt học, điện từ trường, thủy lực, và đặc biệt là trong phân tích ứng xử động lực học của kết cấu có tính chất vật liệu không đồng nhất.

Nguyên lý cơ bản của PPPTHH là chia nhỏ miền khảo sát liên tục thành các phần tử rời rạc có hình học đơn giản (tam giác, tứ giác, khối lập phương, v.v.), gọi là các phần tử hữu hạn. Trong mỗi phần tử, trường vật lý (như chuyển vị, nhiệt độ, ứng suất...) được xấp xỉ bằng các hàm nội suy dựa trên giá trị tại các nút. Nhờ vậy, bài toán vi phân ban đầu được quy đổi thành hệ phương trình đại số tuyến tính (hoặc phi tuyến), có thể giải bằng máy tính số.

Quá trình rời rạc hóa trong phương pháp phần tử hữu hạn cho phép chuyển bài toán liên tục với vô số bậc tự do về một hệ bài toán có số hữu hạn bậc tự do, thông qua việc chia nhỏ miền khảo sát thành các phần tử rời rạc. Bên trong mỗi phần tử, trường chuyển vị được mô tả bằng các hàm nội suy dựa trên giá trị chuyển vị tại các nút. Thông thường, các hàm nội suy được chọn dưới dạng đa thức bậc thấp hoặc các hàm hình học đơn giản, bảo đảm tính liên tục và chính xác cần thiết.

Phương pháp phần tử hữu hạn tạo điều kiện để mô phỏng chính xác các đặc trưng cơ học như phân bố ứng suất – biến dạng, dao động, ổn định và hư hỏng của kết cấu, ngay cả khi kết cấu làm việc trong điều kiện biên và tải trọng phức tạp. Đây là điều mà các phương pháp giải tích truyền thống thường khó xử lý, đặc biệt khi đối mặt với các mô hình vật liệu không đồng nhất như FGM hoặc hình học phi tuyến.

Đối với bài toán động, sử dụng nguyên lý công ảo: Mọi vật biến dạng ở trạng thái cân bằng thì năng lượng biến dạng cân bằng với công của các ngoại lực, lực quán tính trong dịch chuyển vô cùng bé.

Áp dụng nguyên lý công ảo cho một phần tử hữu hạn ta có:

$$\delta U = \delta W \quad (2.16)$$

Trong đó:

+ δU : là năng lượng biến dạng ảo;

+ δW : là công ảo của các ngoại lực và lực quán tính tác dụng lên một phần tử.

Phương trình (2.16) có thể viết thành phương trình dưới dạng:

$$\int_V \delta \varepsilon^T : C : \varepsilon dV = \int_V (\delta u^T F - \delta u^T \rho \ddot{u}) dV + \int_S (\delta u^T \Phi dS + \sum_{i=1}^n \delta u_i^T P_i) \quad (2.17)$$

$$\Leftrightarrow \int_V (\delta \varepsilon^T : C : \varepsilon + \delta u^T \rho \ddot{u}) dV = \int_V \delta u^T F dV + \int_S (\delta u^T \Phi dS + \sum_{i=1}^n \delta u_i^T P_i) \quad (2.18)$$

Trong đó

C là ma trận của modul đàn hồi của vật liệu;

Chỉ số T ở trên biểu thị ma trận hay véc tơ chuyển vị;

P_i là các lực tập trung, u_i là chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung P_i ($i = 1 \dots n$);

V là thể tích của phần tử;

S là diện tích bề mặt;

Φ là lực mặt tác dụng lên biến S, ρ là mật độ khối lượng;

δu , $\delta \varepsilon$ là chuyển vị và biến dạng vô cùng nhỏ bên trong mỗi phần tử.

Véc tơ chuyển vị **u** tại vị trí bất kỳ được nội suy qua véc tơ chuyển vị nút phần tử **d** thông qua ma trận các hàm dạng **N**:

$$u = N.d ; \dot{u} = N.\dot{d} ; \ddot{u} = N.\ddot{d} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon = [\partial].u = [\partial].N.d = B.d \quad (2.20)$$

$$[B] = [\partial].[N] \quad (2.21)$$

Trong đó: $[B]$ là ma trận *biến dạng- chuyển vị*

$[\partial]$ là toán tử vi phân được cho bởi:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Đặt (2.19), (2.20), (2.21) vào (2.18) ta nhận được:

$$\int_V (\delta d^T . B^T C B . d + \delta d^T N^T \rho N \ddot{d}) dV = \int_V \delta d^T N^T F dV + \int_S \delta d^T N^T \Phi dS + \sum_{i=1}^n \delta d^T N_i^T P_i \quad (2.23)$$

Từ (2.23) ta nhận được phương trình phần tử cho bài toán động có dạng:

$$m\ddot{d} + kd = f \quad (2.24)$$

Trong đó:

m: là ma trận khối lượng phần tử ;

k: là ma trận độ cứng phần tử ;

f: là vec-tơ lực nút phần tử ;

$$m = \int_V N^T \rho N dx \quad (2.25)$$

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dV \quad (2.26)$$

$$f = \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_S [N]^T \{\Phi\} dS + \sum_{i=1}^n N_i^T P_i \quad (2.27)$$

Các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và vec-tơ lực nút đã được thiết lập cho từng phần tử sẽ được tổ hợp lại thông qua quá trình lắp ráp, nhằm tạo thành hệ phương trình tổng quát cho toàn bộ kết cấu trục. Sau khi ghép nối các phần tử, ta thu được các ma trận độ cứng tổng, ma trận khối lượng tổng và vec-tơ tải trọng tổng, tương ứng cho toàn hệ trục.:

$$M\ddot{D} + KD = F \quad (2.28)$$

Trong đó:

$$D = \sum_{e=1}^{nELE} \{d\}_e ; \quad \ddot{D} = \sum_{e=1}^{nELE} \{\ddot{d}\}_e \quad (2.29)$$

Tương ứng theo đó là các vec-tơ chuyển vị và tổng các gia tốc tại các điểm nút của trục:

$$K = \sum_{e=1}^{nELE} \{k\}_e ; \quad M = \sum_{e=1}^{nELE} \{m\}_e ; \quad F = \sum_{e=1}^{nELE} \{f\}_e \quad (2.30)$$

Tương ứng là các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và vec-tơ tải trọng nút tổng thể, nELE là tổng hợp số phần tử trục rời rạc và ký hiệu $\sum_{e=1}^{nELE}$ được dùng theo nghĩa ghép nối các ma trận và vec-tơ lực nút tổng thể theo phương pháp của lý thuyết phần tử hữu hạn.

Công thức (2.28) gọi là công thức (PTHH) phần tử hữu hạn, đây là hệ các phương trình vi phân có ẩn là các chuyển vị nút D, giải phương trình (2.28) tìm được véc-tơ chuyển vị nút tổng thể D hay véc-tơ chuyển vị nút phần tử d.

Công thức (2.24) cho phần tử, (2.28) cho kết cấu có thể được thiết lập từ nguyên

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U - \Pi] dt = 0 \quad (2.31)$$

Với các điều kiện ràng buộc tại hai thời điểm bất kỳ: $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$

Khi biến đổi các biểu thức năng lượng biến dạng đàn hồi U, động năng T và thế năng Π của ngoại lực theo trường chuyển vị $\mathbf{u}$, các biểu thức này có thể viết dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^T dV \rightarrow \delta T = \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^T dV \quad (2.32)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \rightarrow \delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (2.33)$$

$$\delta \Pi = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Phi} dS - \sum_{i=1}^n \delta u_i^T P_i \quad (2.34)$$

Đặt vào biểu thức Hamilton ta có:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} [T - U - \Pi] dt &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta U - \delta \Pi] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^T dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dV dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Phi} dS dt + \sum_{i=1}^n \delta u_i^T P_i dt = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sử dụng tích phân từng phần cho biểu thức đầu tiên của (2.35) chú ý điều kiện ràng buộc $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$ ta có :

$$\int_{t_1}^{t_2} [\rho.\dot{u}.\delta\dot{u}^T] dt = \left(\rho.\dot{u}.\delta\dot{u}^T \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [\rho.\ddot{u}.\delta u^T] dt = - \int_{t_1}^{t_2} [\rho.\ddot{u}.\delta u^T] dt \quad (2.36)$$

Sử dụng biểu thức nội suy (2.19) thay vào (2.35) kết hợp (2.36) ta nhận được:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{d}\delta d^T - K.d.\delta d^T + f.\delta d^T] dt = 0 \quad (2.37)$$

Với m, K, f được xác định như (2.25), (2.26), (2.27).

Do δd^T nhỏ tùy ý nên từ (3.37) ta nhận được phương trình PTHH (2.14)

$$m.\ddot{d} + k.d = f \quad (2.38)$$

Khi ghép nối các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, véc-tơ lực nút phần tử ta thu được phương trình (2.28)

2.3.2. Hàm dạng cho phần tử trục

Xét phần tử trục với hai nút cơ bản (nút i, nút j) có chiều dài L, do đặc điểm biến dạng của trục, tại mỗi nút sẽ có bốn chuyển vị nút. Vector chuyển vị nút toàn cục của phần tử vật liệu có gradien chức năng (FGM) hai nút (i, j) gồm tám thành phần, được biểu diễn như sau:

$$d = \{u_i \quad \omega_i \quad \varphi_i \quad \phi_i \quad u_j \quad \omega_j \quad \varphi_j \quad \phi_j\}^T \quad (2.39)$$

Các chuyển vị $u(x,t)$, $\omega(x,t)$, $\varphi(x,t)$ và xoắn $\phi(x,t)$ được nội suy từ các chuyển vị nút như sau:

$$\begin{cases} u = N_u d \\ \omega = N_\omega d \\ \varphi = N_\varphi d \\ \phi = N_\phi d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{,x} = N_{u,x} d \\ \omega_{,x} = N_{\omega,x} d \\ \varphi_{,x} = N_{\varphi,x} d \\ \phi_{,x} = N_{\phi,x} d \end{cases} \quad (2.40)$$

trong đó $N_u, N_\omega, N_\varphi, N_\phi$ là các ma trận hàm dạng (shape function) được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}
N_u &= \{N_{u1} \quad N_{u2} \quad N_{u3} \quad N_{u4} \quad N_{u5} \quad N_{u6} \quad N_{u7} \quad N_{u8}\} \\
N_\omega &= \{N_{\omega1} \quad N_{\omega2} \quad N_{\omega3} \quad N_{\omega4} \quad N_{\omega5} \quad N_{\omega6} \quad N_{\omega7} \quad N_{\omega8}\} \\
N_\varphi &= \{N_{\varphi1} \quad N_{\varphi2} \quad N_{\varphi3} \quad N_{\varphi4} \quad N_{\varphi5} \quad N_{\varphi6} \quad N_{\varphi7} \quad N_{\varphi8}\} \\
N_\phi &= \{N_{\phi1} \quad N_{\phi2} \quad N_{\phi3} \quad N_{\phi4} \quad N_{\phi5} \quad N_{\phi6} \quad N_{\phi7} \quad N_{\phi8}\}
\end{aligned}$$

Sử dụng hàm Hermite và kết hợp với dạng đầu tiên của hàm trục, ta có:

$$\begin{aligned}
N_{u1} &= \frac{L-x}{L}, N_{u5} = \frac{x}{L}, N_{u2} = N_{u3} = N_{u4} = N_{u6} = N_{u7} = N_{u8} = 0 \\
N_{\omega2} &= 2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1, N_{\omega3} = \frac{x^3}{L^2} - 2\frac{x^2}{L} + x, N_{\omega6} = -2\frac{x^3}{L^3} + 3\frac{x^2}{L^2}, N_{\omega7} = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \\
N_{\omega1} &= N_{\omega5} = N_{\omega7} = N_{\omega8} = 0 \\
N_{\varphi2} &= N_{\omega2'x} = \frac{dN_{\omega2}}{dx} = \frac{6x^2}{L^3} + 6\frac{x}{L^2}, N_{\varphi3} = N_{\omega3'x} = \frac{3x^2}{L^2} - 4\frac{x}{L} + 1 \\
N_{\varphi6} &= N_{\omega6'x} = -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2}, N_{\varphi7} = N_{\omega7'x} = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \\
N_{\varphi1} &= N_{\varphi5} = N_{\varphi7} = N_{\varphi8} = 0 \\
N_{\phi4} &= \frac{L-x}{L}, N_{\phi8} = \frac{x}{L} \\
N_{\phi1} &= N_{\phi2} = N_{\phi3} = N_{\phi5} = N_{\phi6} = N_{\phi7} = 0
\end{aligned}$$

2.3.3. Ma trận độ cứng cho phần tử trục

Từ hàm năng lượng đàn hồi (2.11), sử dụng công thức nội suy (2.40) đặt vào biểu thức năng lượng đàn hồi ta có thể nhận được ma trận độ cứng phần tử cho trục với độ dài L có cơ tính biến đổi dọc:

$$\text{Chú ý rằng: } \begin{cases} u = \mathbf{N}_u \mathbf{d} \\ \omega = \mathbf{N}_\omega \mathbf{d} \\ \varphi = \mathbf{N}_\varphi \mathbf{d} \\ \phi = \mathbf{N}_\phi \mathbf{d} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{,x} = \mathbf{N}_{u,x} \cdot \mathbf{d} \\ \omega_{,x} = \mathbf{N}_{\omega,x} \cdot \mathbf{d} \\ \varphi_{,x} = \mathbf{N}_{\varphi,x} \cdot \mathbf{d} \\ \phi_{,x} = \mathbf{N}_{\phi,x} \cdot \mathbf{d} \end{cases}$$

Khi đó từ (2.11) ta có:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_1 u_{,x}^2 + A_2 \omega_{,xx}^2 + A_3 \phi_{,x}^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{d} \int_0^L \left[\mathbf{N}_{u,x}^T A_1 \mathbf{N}_{u,x} + \mathbf{N}_{\omega,xx}^T A_2 \mathbf{N}_{\omega,xx} + \mathbf{N}_{\phi,x}^T A_3 \mathbf{N}_{\phi,x} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{k}_{aa} + \mathbf{k}_{bb} + \mathbf{k}_{ss}) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Với

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{aa} + \mathbf{k}_{bb} + \mathbf{k}_{ss}$$

$$\mathbf{k}_{aa} = \int_0^L \mathbf{N}_{u,x}^T A_1 \mathbf{N}_{u,x} dx,$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \int_0^L \mathbf{N}_{\omega,xx}^T A_2 \mathbf{N}_{\omega,xx} dx,$$

$$\mathbf{k}_{ss} = \int_0^L \mathbf{N}_{\phi,x}^T A_3 \mathbf{N}_{\phi,x} dx$$

Tương ứng là các ma trận độ cứng phần tử sinh ra từ biến dạng dọc trục, biến dạng uốn và biến dạng xoắn.

2.3.4. Ma trận khối lượng phần tử

Xuất phát từ biểu thức động năng thiết lập được ở (1.16), kết hợp với phép nội suy trường chuyển vị thông qua các hàm dạng.

$$\text{Do } \begin{cases} u = \mathbf{N}_u \mathbf{d} \\ \omega = \mathbf{N}_\omega \mathbf{d} \\ \phi = \mathbf{N}_\phi \mathbf{d} \\ \theta = \mathbf{N}_\theta \mathbf{d} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\omega} = \mathbf{N}_\omega \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\phi} = \mathbf{N}_\phi \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\theta} = \mathbf{N}_\theta \dot{\mathbf{d}} \end{cases}$$

- Động năng tổng quát của trục:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[B_1 (\dot{u}^2 + \dot{\omega}^2) + B_2 \dot{\phi}^2 + B_3 \dot{\theta}^2 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \dot{\mathbf{d}} \int_0^L (\mathbf{N}_u^T B_1 \mathbf{N}_u + \mathbf{N}_\omega^T B_1 \mathbf{N}_\omega + \mathbf{N}_\phi^T B_2 \mathbf{N}_\phi + \mathbf{N}_\theta^T B_3 \mathbf{N}_\theta) dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}^T (\mathbf{M}_{uu} + \mathbf{M}_{\omega\omega} + \mathbf{M}_{\varphi\varphi} + \mathbf{M}_{\phi\phi}) \dot{\mathbf{d}}$$

Trong đó

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{uu} + \mathbf{M}_{\omega\omega} + \mathbf{M}_{\varphi\varphi} + \mathbf{M}_{\phi\phi}$$

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_0^L \mathbf{N}_u^T \mathbf{B}_1 \mathbf{N}_u dx,$$

$$\mathbf{M}_{\omega\omega} = \int_0^L \mathbf{N}_\omega^T \mathbf{B}_1 \mathbf{N}_\omega dx,$$

$$\mathbf{M}_{\varphi\varphi} = \int_0^L \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{B}_2 \mathbf{N}_\varphi dx,$$

$$\mathbf{M}_{\phi\phi} = \int_0^L \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{B}_3 \mathbf{N}_\phi dx$$

Với

$$\mathbf{B}_1 = 2\pi \int_0^R \left[(\rho_m - \rho_c) \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right] r dr$$

$$\mathbf{B}_2 = \pi \int_0^R \left[(\rho_m - \rho_c) \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right] r^3 dr$$

$$\mathbf{B}_3 = 2\pi \int_0^R \left[(\rho_m - \rho_c) \left(1 - \frac{r^k}{R^k}\right)^n + \rho_c \right] r^3 dr$$

$\mathbf{m}_{uu}, \mathbf{m}_{\omega\omega}, \mathbf{m}_{\varphi\varphi}, \mathbf{m}_{\theta\theta}, \mathbf{m}_{u\varphi}$ tương ứng là các ma trận khối lượng sinh ra từ chuyển dịch theo phương dọc trục (hướng trục của trục tròn), chuyển vị ngang, tương hỗ chuyển vị dọc trục và quay của mặt cắt ngang, sự quay của mặt cắt ngang.

2.3.5. Vec- tơ lực nút

Giả sử, tại trung điểm của trục chịu tải trọng kích động tập trung và mô men tập trung có dạng điều hòa: $P \cos \Omega t$, $RP \cos \Omega t$ như minh họa trên Hình 2.2. Với các hàm nội suy (2.26), thế năng của các lực này có dạng:

$$\nu = - \left(P \cos \Omega t \cdot \mathbf{N}_\omega^T \Big|_{x=L/2} + P R \cdot \cos \Omega t \cdot \mathbf{N}_\theta^T \Big|_{x=L/2} \right) \mathbf{d} \quad (2.42)$$

trong đó $\mathbf{N}_\omega^T \Big|_{x=L/2}$, $\mathbf{N}_\theta^T \Big|_{x=L/2}$ là giá trị của các ma trận các hàm dạng của chuyển vị ngang và góc xoắn đánh giá tại vị trí của lực P ở trung điểm của trục. Phương trình

(2.33) có thể viết dưới dạng:

$$v = -f.d \quad (2.43)$$

$$\text{Với } f = \{N_i \quad Q_i \quad M_i \quad H_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j \quad H_j\}^T \quad (2.44)$$

là vec-tơ lực nút phần tử chứa lực tác dụng với các thành phần tại các nút i và j như sau:

$$\begin{aligned} N_i &= N_j = 0 \\ M_i &= P \cos \Omega t N_{\omega_2} \Big|_{x=L/2} \\ M_j &= P \cos \Omega t N_{\omega_3} \Big|_{x=L/2} \\ Q_i &= P \cos \Omega t N_{\omega_6} \Big|_{x=L/2} \\ Q_j &= P \cos \Omega t N_{\omega_7} \Big|_{x=L/2} \\ H_i &= RP \cos \Omega t N_{\theta_4} \Big|_{x=L/2} \\ H_j &= RP \cos \Omega t N_{\theta_8} \Big|_{x=L/2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Như vậy, các phương trình (2.44) và (2.45) hoàn toàn xác định được vec-tơ lực nút f .

2.4. Kết luận chương 2

Chương 2 đã trình bày các phương trình cơ sở cho đề bài trục tròn FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang. Sử dụng giả thuyết Euler Bernoulli đã xây dựng được phương trình năng lượng đàn hồi, động năng và thế năng cho trục tròn FGM. Từ đó xây dựng được phương trình chuyển động của trục tròn. Kết hợp với điều kiện biên của nguyên lý biến phân Hamilton để thiết lập dạng hoàn chỉnh của phương trình.

Xây dựng được các hàm năng lượng biến dạng đàn hồi, hàm động năng cho trục có cơ tính biến đổi theo phương ngang. Từ đó, thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của trục có cơ tính biến đổi.

Chương 2 đã xây dựng phương trình PTHH cho bài toán động dựa trên nguyên lý công ảo và nguyên lý Hamilton. Từ đó có thể áp dụng cho chi tiết trục đang xét, trong đó lựa chọn được các hàm dạng phù hợp dựa trên lý thuyết Bernoulli. Xây dựng

được ma trận khối lượng và ma trận độ cứng cho phần tử trực từ các hàm năng lượng và động năng của trục thiết lập được ở chương 1.

CHƯƠNG 3. QUY TRÌNH TÍNH TOÁN VÀ MÔ PHỎNG SỐ

Chương này trình bày quá trình xây dựng mô hình phần tử hữu hạn cho bài toán trục tròn FGM, trong đó xây dựng các biểu thức cần thiết cho ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc-tơ lực nút của phần tử. Trục FGM được nghiên cứu trong đề tài được giả định có cơ tính biến thiên theo phương ngang, tức là theo bán kính của mặt cắt tròn. Giả thuyết dầm Euler–Bernoulli được sử dụng để dựng mô hình hóa ứng xử cơ học của trục, phù hợp với bài toán dao động trong miền biến dạng nhỏ.

Trong chương, các công thức cụ thể cho từng thành phần của mô hình phần tử – bao gồm ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc-tơ tải nút – sẽ được trình bày chi tiết, áp dụng cho trục tròn có tính chất vật liệu biến đổi theo bán kính. Nội dung này là cơ sở để xây dựng hệ phương trình chuyển động tổng thể của hệ kết cấu.

Bên cạnh đó, chương cũng giới thiệu thuật toán tính toán số trong miền thời gian để phân tích đáp ứng dao động của trục chịu tải trọng di động. Phương pháp tích phân trực tiếp Newmark, với biến thể gia tốc trung bình, được lựa chọn làm thuật toán giải chính. Ngoài ra, chương còn trình bày cách xây dựng véc-tơ tải trọng nút tổng thể theo thời gian, cũng như kỹ thuật xử lý mặt cắt ngang thay đổi trong chương trình tính toán, đảm bảo độ chính xác của mô phỏng khi áp dụng vào kết cấu trục FGM.

3.1. Quy trình tính toán và thuật toán số

3.1.1. Phương pháp Newmark

Tôi sẽ trình bày phương pháp số của Newmark, một phương pháp đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều phần mềm thương mại hiện có, nhờ tính linh hoạt cao, để phục vụ cho việc phân tích động lực học kết cấu. Các phương trình của Newmark được biểu diễn như sau:

$$\dot{d}_{i+1} = \dot{d}_i + (\Delta t) \left[(1 - \gamma) \ddot{d}_i + \gamma \ddot{d}_{i+1} \right] \quad (3.1)$$

$$d_{i+1} = d_i + (\Delta t) \dot{d}_i + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}_i + \beta \ddot{d}_{i+1} \right] \quad (3.2)$$

$$\ddot{d}_{i+1} = (\Delta t)^2 [F_{i+1} - Kd_{i+1}] \quad (3.3)$$

Trong đó, β và γ là các tham số được lựa chọn. Thông thường, β được chọn trong khoảng từ 0 đến 1/4, và γ thường được lấy bằng 1/2.

Ví dụ, khi chọn $\gamma=1/2$ và $\beta=0$, có thể chứng minh rằng phương trình (3.1) và (3.2) sẽ rút gọn thành các phương trình ngắn hơn. Nếu chọn $\gamma=1/2$ và $\beta=1/6$, thì các phương trình (3.1) và (3.2) tương ứng với giả thiết gia tốc tuyến tính trong mỗi bước thời gian. Đối với $\gamma=1/2$ và $\beta=1/4$, đã có chứng minh rằng phép phân tích số là ổn định; nghĩa là các đại lượng tính toán được như chuyển vị và vận tốc không bị tăng không giới hạn, bất kể số bước thời gian được chọn. Ngoài ra, theo dữ liệu thực nghiệm, việc chọn bước thời gian xấp xỉ bằng 1/10 chu kỳ dao động riêng ngắn nhất của kết cấu đang được phân tích thường cho kết quả tốt nhất.

Để tìm $\dot{d}_{i+1}$ ta nhân phương trình (3.2) với ma trận khối lượng M , sau đó thay $\ddot{d}_{i+1}$ vào biểu thức từ phương trình (3.3) vào, thu được:

$$Md_{i+1} = Md_i + (\Delta t)M\dot{d}_i + M(\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}_i \right] + \beta(\Delta t)^2 [F_{i+1} - Kd_{i+1}] \quad (3.4)$$

Kết hợp với các hạng tử từ phương trình (3.4), ta được :

$$(M + \beta(\Delta t)^2 K)d_{i+1} = \beta(\Delta t)^2 F_{i+1} + Md_i + (\Delta t)M\dot{d}_i + M(\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}_i \right] \quad (3.5)$$

Chia phương trình trên (3.5) cho $\beta(\Delta t)^2$, ta được:

$$K'd_{i+1} = F'_{i+1} \quad (3.6)$$

Với:

$$K' = K + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M \quad (3.7)$$

$$F'_{i+1} = F_{i+1} + \frac{M}{\beta(\Delta t)^2} \left[d_i + (\Delta t)\dot{d}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{d}_i \right]$$

Quy trình giải bài toán bằng phương pháp Newmark như sau:

1. Tại thời điểm $t=0$, giá trị d_0 được biết từ điều kiện biên ban đầu, và $\dot{d}_0$ được biết từ điều kiện vận tốc ban đầu.
2. Giải phương trình tại $t=0$ để tìm $\ddot{d}_0$ (trừ khi đã biết từ điều kiện biên gia tốc ban đầu), tức là:

$$\ddot{d}_0 = M^{-1}(E_0 - Kd_0)$$

3. Giải phương trình (3.5) để tìm d_1 , vì E_1 vì đã biết cho mọi bước thời gian, và $d_0, \dot{d}_0, \ddot{d}_0$ đã được tìm từ bước 1 và 2.

4. Sử dụng phương trình (3.2) để tìm được $\ddot{d}_1$

$$\ddot{d}_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \left[d_1 - d_0 - (\Delta t)\dot{d}_0 - (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}_0 \right]$$

5. Giải phương trình (3.2) để tìm được $\dot{d}_1, \ddot{d}_1$
6. Sử dụng kết quả phép tính từ bước 4 và 5, lặp lại bước 3 để tìm d_2 , sau đó lặp lại bước 4 và 5 để tìm $\dot{d}_2, \ddot{d}_2$. Tiếp tục sử dụng các bước 3 đến 5 để tính $d_{i+1}, \dot{d}_{i+1}, \ddot{d}_{i+1}$.

Phần 3.1.2 là sơ đồ mô tả quy trình giải bằng phương pháp Newmark.

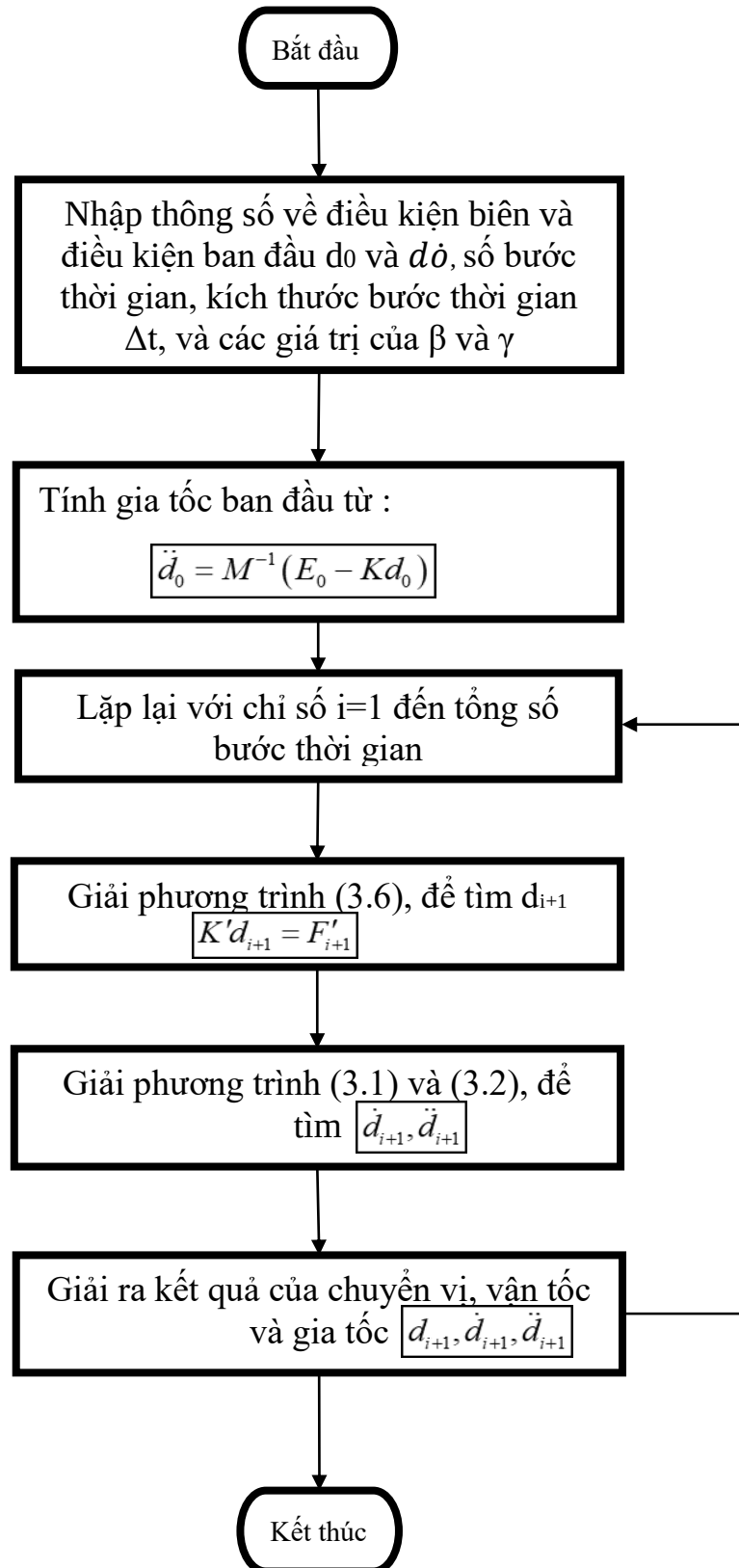
Ưu điểm của phương pháp này so với phương pháp vi sai phân trung tâm là

- Phương pháp New mark có thể được làm ổn định do điều kiện nếu chọn

$$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}.$$

- Cho phép sử dụng bước thời gian lớn hơn nhưng vẫn đảm bảo kết quả tốt, vì biểu thức xấp xỉ gần hơn với gia tốc thực và đáp ứng chuyển vị của kết cấu theo thời gian.

3.1.2. Quy trình tính toán



3.2. Kết quả mô phỏng số và thảo luận

3.2.1. Mô hình bài toán và thông số vật liệu

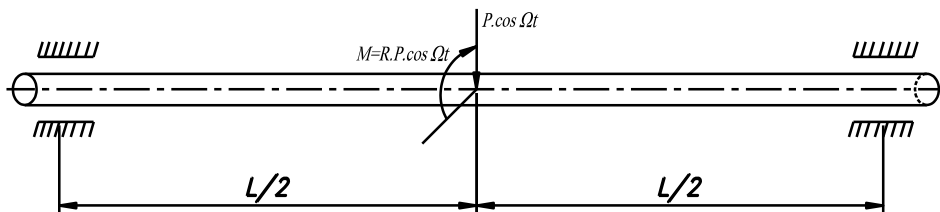
Trong mục này sẽ đưa ra bài toán và các thông số vật liệu với cơ tính biến thiên theo phương ngang trục để minh họa cho phương trình PTHH đã xây dựng được ở chương 2 và thuật toán, chương trình số được lập trình trên phần mềm Matlab. Các tính toán minh họa cho thuật toán số và chương trình số với trục có cơ tính biến đổi theo chiều dọc trục cùng vật liệu hai pha được tạo từ thép không gỉ SUS304 (pha m) + gốm Al_2O_3 (pha c), cụ thể tại tâm của trục $r=0$ vật liệu thuần túy là thép, từ tâm đi ra biên $r=R$ vật liệu thuần túy là gốm, cơ tính của vật liệu thay đổi liên tục phụ thuộc vào k , n theo công thức (2.2).

Kích thước trục: $L = 0,5$ (m), $d = 0,02$ (m); bán kính trung bình bánh răng tại trung điểm của trục $R = 0,06$ (m); các lực tác dụng lên trục tại vị trí trung điểm của trục có dạng $F = P_0 \cdot \cos(\Omega t)$; $M = R \cdot P_0 \cdot \cos(\Omega t)$; $P_0 = 1500$ (N).

Độ võng và góc xoắn lớn nhất của trục với vật liệu thuần nhất tính bằng giải tích được tính bởi công thức [56] :

$$z_{\max} = \frac{P_0 L^3 \cos(\Omega t)}{24,65 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.8)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{P_0 R L \cos(\Omega t)}{2 \cdot G \cdot J_x} \quad (3.9)$$



Hình 3.1: Trục có cơ tính thay đổi dọc

Các thông số của vật liệu thành phần:

$$E_m = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$G_m = 8 \cdot 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$\rho_m = 7863 \text{ (kg/m}^3\text{)};$$

$$E_c = 3,8 \cdot 10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$G_c = 18,6 \cdot 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$\rho_c = 3961 \text{ (kg/m}^3\text{)}.$$

3.2.2. Kiểm nghiệm chương trình tính và thuật toán số

Để đảm bảo tính chính xác và hội tụ của mô hình PTHH cũng như thuật toán số áp dụng, kết quả của PTHH xây dựng được trong chương 2 sẽ so sánh với kết quả giải tích (GT) truyền thống và kết quả mô phỏng bằng phần mềm ANSYS. Để thuận lợi trong việc áp dụng phương pháp giải tích ta cần đưa trục về dạng có cơ tính vật liệu không thay đổi (vật liệu thuần nhất).

Kích thước trục: $L = 0,5$ (m), $d = 0,02$ (m); bán kính trung bình bánh răng tại trung điểm của trục $R = 0.06$ (m); các tham số vật liệu $E_c = E_m = E = 2,1.10^{11}$ (N/m²); $G_c = G_m = 8.10^{10}$ (N/m²); $\rho = 7860$ (kg/m³), các lực tác dụng lên trục tại vị trí trung điểm của trục $F = P_0.\cos(\Omega t)$; $M = R.P_0.\cos(\Omega t)$; $P_0 = 1500$ (N).

Độ võng và góc xoắn lớn nhất của trục với vật liệu thuần nhất tính bằng phương pháp giải tích được tính bởi công thức [56] :

$$z_{\max} = \frac{P_0 L^3 \cos(\Omega t)}{24,65.E.J_y} \quad (3.10)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{P_0 R L \cos(\Omega t)}{2.G.J_x} \quad (3.11)$$

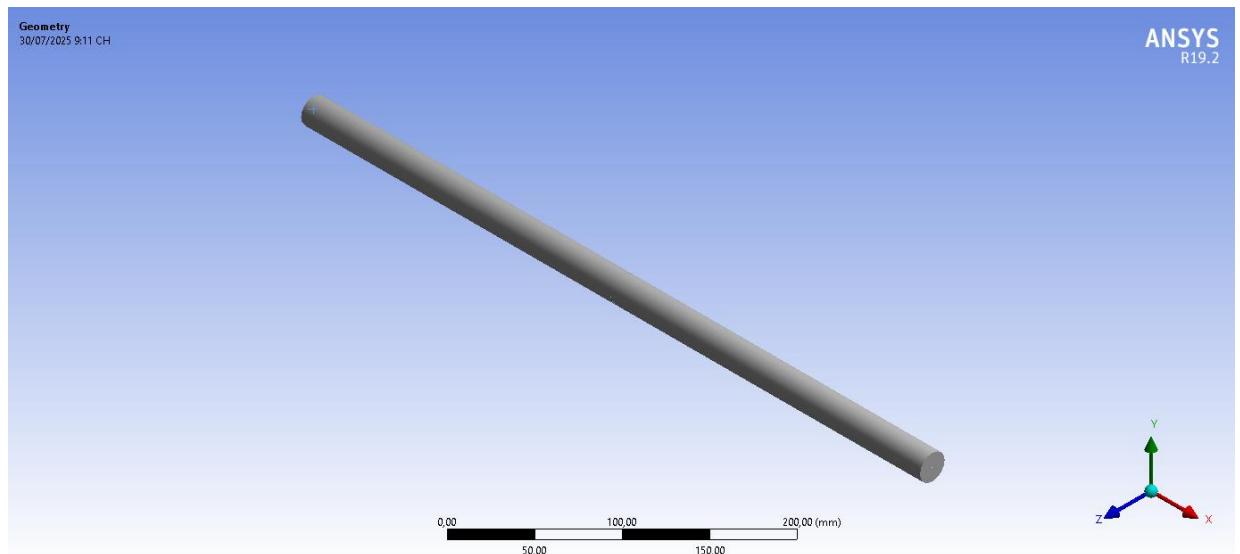
3.2.3. Mô phỏng bằng phần mềm ANSYS

- Vật liệu thuần túy là thép
- + Tính biến dạng ngang
- + Tính góc xoắn
- So sánh với kết quả PTHH và kết quả giải tích

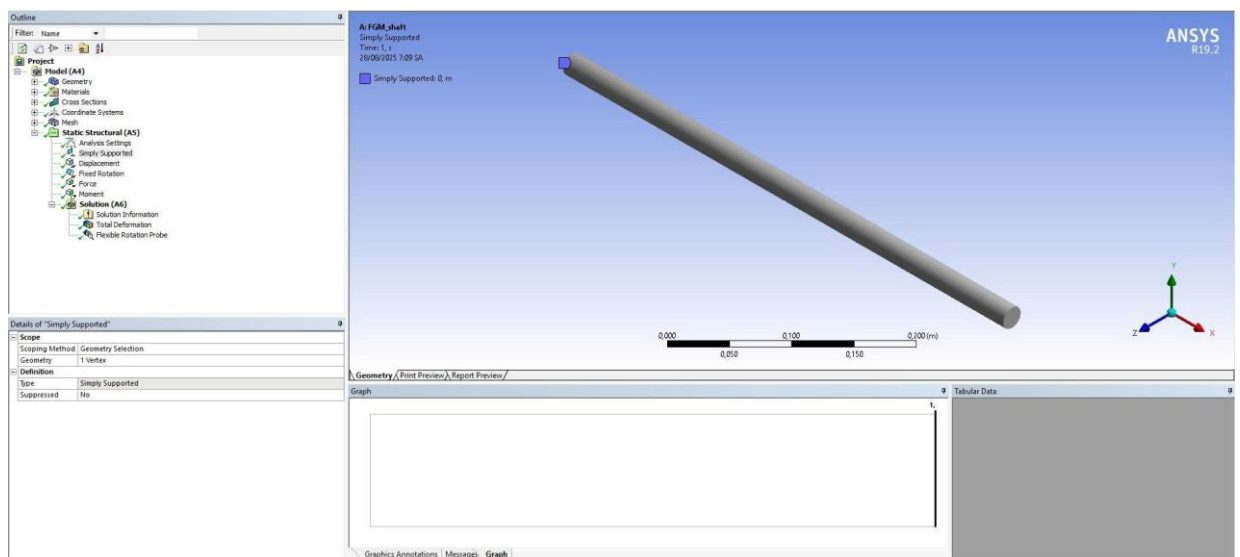
B1: Chọn vật liệu cho trục là vật liệu có thông số tương tự đề bài

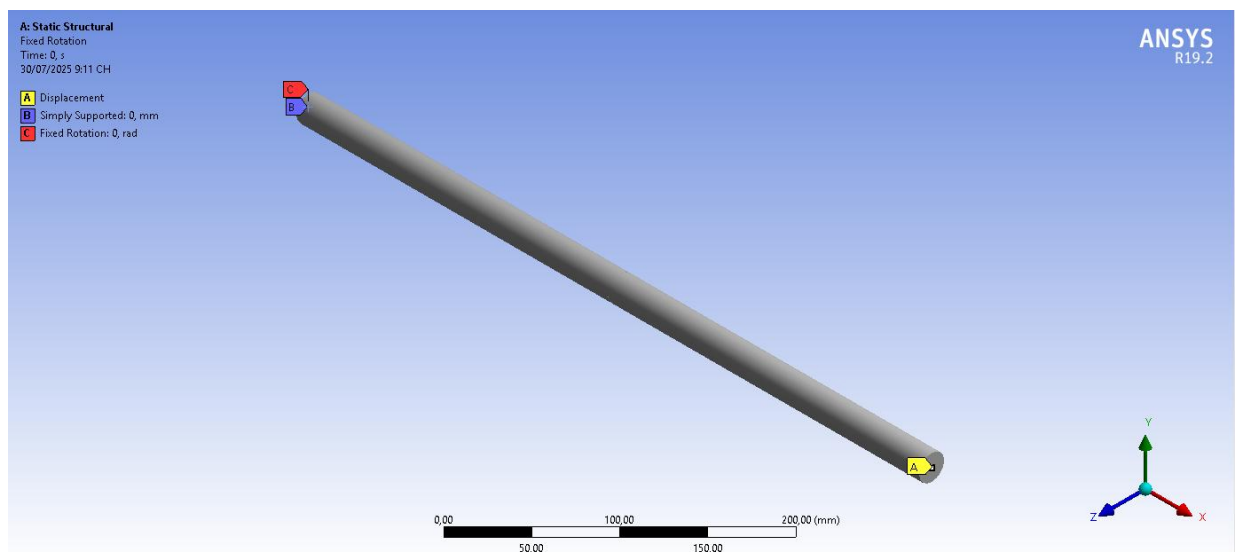
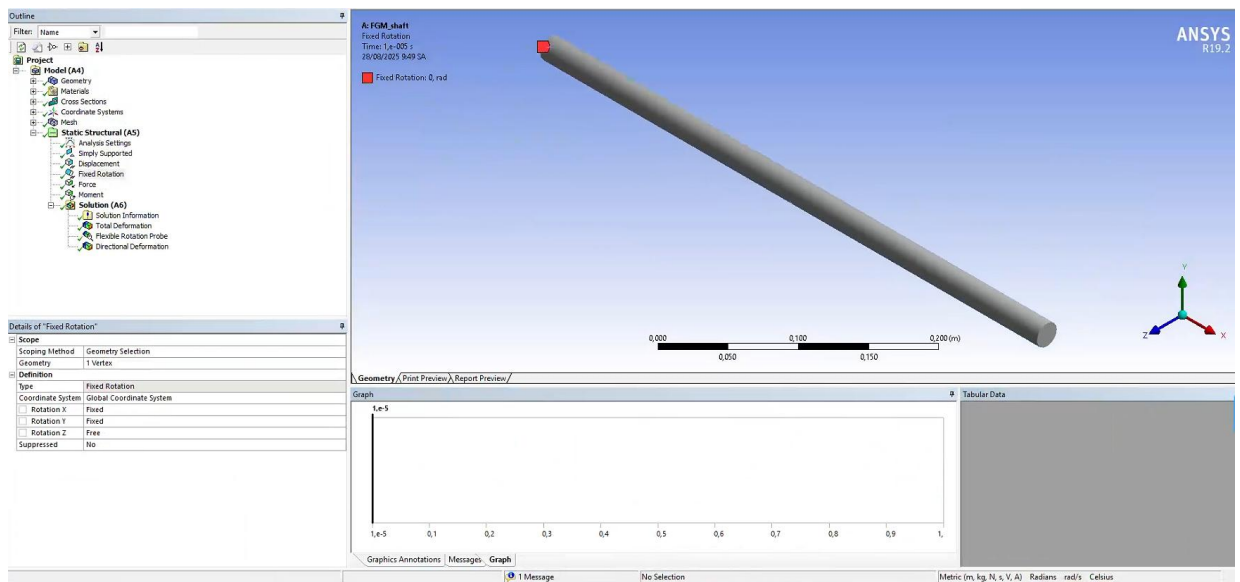
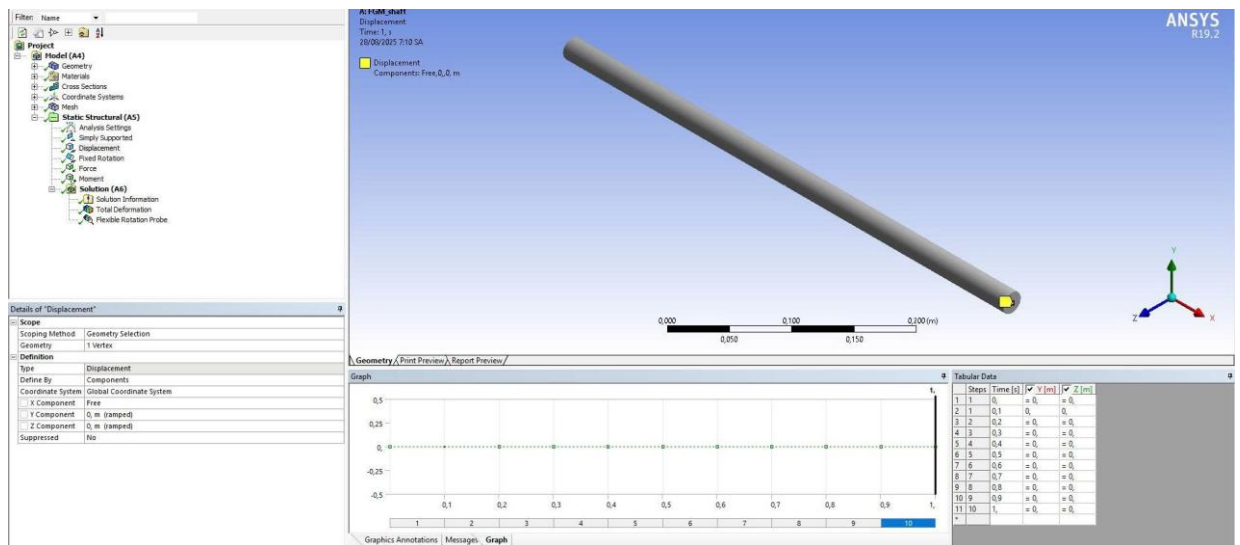
Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Density	7863	kg m^-3	
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
6	Isotropic Elasticity			
7	Derive from	Shear Modulus and Young's M...		
8	Young's Modulus	2,1E+11	Pa	
9	Poisson's Ratio	0,3125		
10	Bulk Modulus	1,8667E+11	Pa	
11	Shear Modulus	8E+10	Pa	
12	Strain-Life Parameters			
20	S-N Curve	Tabular		
24	Tensile Yield Strength	2,5E+08	Pa	
25	Compressive Yield Strength	2,5E+08	Pa	
26	Tensile Ultimate Strength	4,6E+08	Pa	
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa	

B2: Dựng mô hình trục với $L = 0,5$ (m), $d = 0,02$ (m);

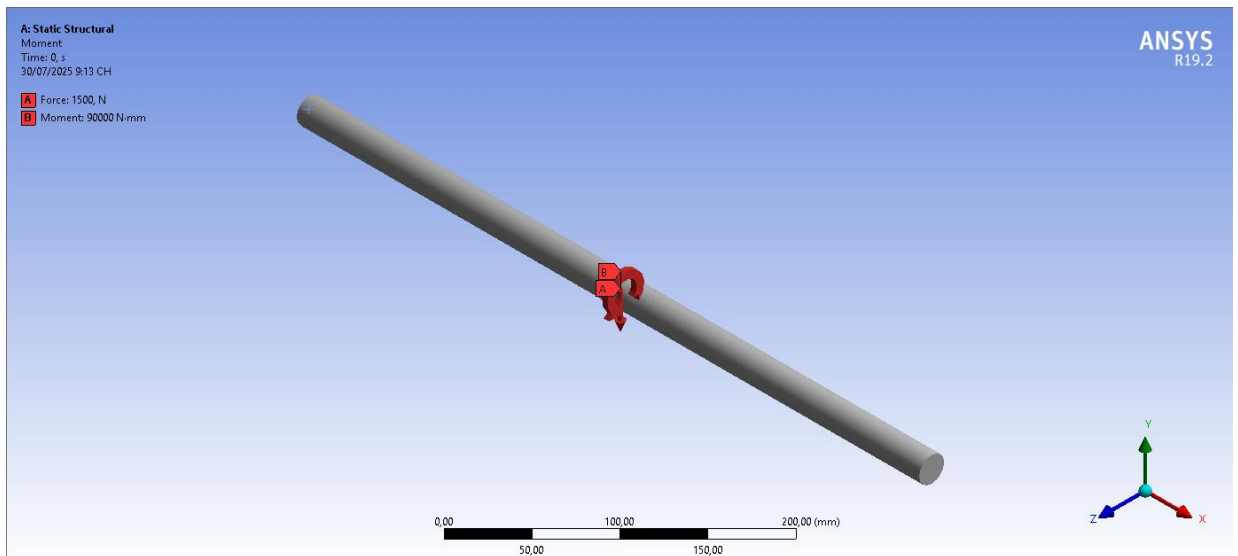


B3: Đặt các điều kiện biên lên trục





B4: Đặt lực và momen tác dụng lên trục:



B5: Nhận kết quả của mô phỏng biến dạng Total Displacement và góc xoắn Rotation. Lập bảng dữ liệu thu được qua phần mềm.

Với $\Omega = 20$ (rad/s)

Tabular Data			
	Time [s]	✓ Minimum [m]	✓ Maximum [m]
1	1,e-005	0,	4,764e-003
2	0,1	0,	1,9825e-003
3	0,2	0,	3,1139e-003
4	0,3	0,	4,5742e-003
5	0,4	0,	6,9316e-004
6	0,5	0,	3,9973e-003
7	0,6	0,	4,0201e-003
8	0,7	0,	6,5141e-004
9	0,8	0,	4,5623e-003
10	0,9	0,	3,1457e-003
11	1,	0,	1,9441e-003

Tabular Data			Tabular Data		
	Time [s]	✓ Flexible Rotation Probe (X) [rad]		Time [s]	✓ Flexible Rotation Probe (X) [rad]
1	1,e-005	1,7942e-002	1	1,e-005	0,
2	0,1	0,	2	0,1	7,4665e-003
3	0,2	0,	3	0,2	1,1728e-002
4	0,3	1,7227e-002	4	0,3	0,
5	0,4	0,	5	0,4	2,6106e-003
6	0,5	0,	6	0,5	1,5055e-002
7	0,6	1,514e-002	7	0,6	0,
8	0,7	2,4533e-003	8	0,7	0,
9	0,8	0,	9	0,8	1,7182e-002
10	0,9	1,1847e-002	10	0,9	0,
11	1,	7,3218e-003	11	1,	0,

Với $\Omega = 50$ (rad/s)

Tabular Data			
	Time [s]	✓ Minimum [m]	✓ Maximum [m]
1	1,e-005	0,	4,764e-003
2	0,1	0,	1,3514e-003
3	0,2	0,	3,9973e-003
4	0,3	0,	3,6191e-003
5	0,4	0,	1,9441e-003
6	0,5	0,	4,7221e-003
7	0,6	0,	7,3485e-004
8	0,7	0,	4,3052e-003
9	0,8	0,	3,1773e-003
10	0,9	0,	2,5026e-003
11	1,	0,	4,5971e-003

Tabular Data			Tabular Data		
	Time [s]	✓ Flexible Rotation Probe (X) [rad]		Time [s]	✓ Flexible Rotation Probe (X) [rad]
1	1,e-005	0,	1	1,e-005	1,7942e-002
2	0,1	0,	2	0,1	5,0895e-003
3	0,2	1,5055e-002	3	0,2	0,
4	0,3	1,363e-002	4	0,3	0,
5	0,4	0,	5	0,4	7,3218e-003
6	0,5	0,	6	0,5	1,7784e-002
7	0,6	0,	7	0,6	2,7676e-003
8	0,7	1,6214e-002	8	0,7	0,
9	0,8	1,1966e-002	9	0,8	0,
10	0,9	0,	10	0,9	9,4253e-003
11	1,	0,	11	1,	1,7313e-002

2. So sánh kết quả PTHH, mô phỏng ANSYS và kết quả giải tích

Bảng 3.1. So sánh độ võng, góc xoắn lớn nhất của trục bằng kết quả PTHH, giải tích và ANSYS với $\Omega = 20$ (rad/s)						
Thời gian t(s)	Độ võng PTHH (m)	Độ võng GT(m)	Độ võng Ansys	Góc xoắn PTHH(rad)	Góc xoắn GT(rad)	Góc xoắn Ansys
0	0.0046	0.0045	0.0047	0.0179	0.0176	0.0179
0.1	0.0019	0.0019	0.0019	0.0075	0.0073	0.0075
0.2	0.0030	0.0030	0.0031	0.0117	0.0115	0.0117
0.3	0.0044	0.0043	0.0045	0.0172	0.0169	0.0172
0.4	$6.640 \cdot 10^{-4}$	$6.587 \cdot 10^{-4}$	$6.93 \cdot 10^{-4}$	0.0026	0.0026	0.0026
0.5	0.0038	0.0038	0.0039	0.0150	0.0147	0.0151
0.6	0.0039	0.0038	0.0040	0.0151	0.0148	0.0151
0.7	$6.240 \cdot 10^{-4}$	$6.191 \cdot 10^{-4}$	$6.514 \cdot 10^{-4}$	0.0024	0.0024	0.00245
0.8	0.0044	0.0043	0.0046	0.0171	0.0168	0.0172
0.9	0.0030	0.0030	0.0031	0.0118	0.0116	0.0118
1	0.0019	0.0018	0.0019	0.0073	0.0072	0.00732

Bảng 3.2. So sánh độ võng, góc xoắn lớn nhất của trục bằng kết quả PTHH, giải tích và ANSYS với $\Omega = 50$ (rad/s)						
Thời gian t(s)	Độ võng PTHH (m)	Độ võng GT(m)	Độ võng Ansys	Góc xoắn PTHH(rad)	Góc xoắn GT(rad)	Góc xoắn Ansys
0	0.0046	0.0045	0.0048	0.0179	0.0176	0.0179
0.1	0.0013	0.0013	0.0014	0.0051	0.0050	0.0051
0.2	0.0038	0.0038	0.0040	0.0150	0.0147	0.0151
0.3	0.0035	0.0034	0.0036	0.0136	0.0134	0.0136
0.4	0.0019	0.0018	0.0019	0.0073	0.0072	0.0073
0.5	0.0045	0.0045	0.0046	0.0177	0.0174	0.0178
0.6	$7.039.10^{-4}$	$6.984.10^{-4}$	$7.34.10^{-4}$	0.0028	0.0027	0.0028
0.7	0.0041	0.0041	0.0043	0.0162	0.0159	0.0162
0.8	0.0030	0.0030	0.0032	0.0119	0.0117	0.012
0.9	0.0024	0.0024	0.0025	0.0094	0.0092	0.0094
1	0.0044	0.0044	0.0046	0.0173	0.0170	0.0173

Bảng 3.1 và 3.2 trình bày kết quả so sánh độ võng và góc xoắn lớn nhất của trục tròn có cơ tính biến thiên theo phương ngang, ứng với 2 tần số kích động $\Omega = 20$ rad/s và $\Omega = 50$ rad/s. Các kết quả được thu thập từ ba phương pháp: Mô hình phần tử hữu hạn (PTHH), giải tích truyền thống (GT) và mô phỏng số bằng phần mềm ANSYS. Trong bảng 3.3 và 3.4 liệu thể hiện kết quả giữa ba phương pháp thể hiện độ lệch nhỏ (tối đa 8%), với mức sai số nhỏ tại các thời điểm khảo sát. Sự hội tụ kết quả này cho ta nhận định rằng mô hình PTHH xây dựng trong nghiên cứu đã mô phỏng hiệu quả hai dạng biến dạng uốn và xoắn của trục, ngay cả khi tần số kích động bị thay đổi.

Bảng 3.3. Đánh giá sai số giữa kết quả ANSYS so với hai kết quả còn lại với $\Omega = 20$ (rad/s) (%)				
Thời gian t (s)	Độ võng PTHH (m)	Độ võng GT(m)	Góc xoắn PTHH(rad)	Góc xoắn GT(rad)
0	2%	4%	0%	2%

0.1	0%	0%	0%	3%
0.2	3%	3%	0%	2%
0.3	2%	5%	0%	2%
0.4	4%	5%	0%	0%
0.5	3%	3%	1%	3%
0.6	3%	5%	0%	2%
0.7	4%	5%	2%	2%
0.8	5%	7%	1%	2%
0.9	3%	3%	0%	2%
1	0%	6%	0%	2%

Bảng 3.4. Đánh giá sai số giữa phương pháp ANSYS so với hai kết quả còn lại với $\Omega = 50$ (rad/s) (%)				
Thời gian t (s)	Độ võng PTHH (m)	Độ võng GT(m)	Góc xoắn PTHH(rad)	Góc xoắn GT(rad)
0	4%	7%	0%	2%
0.1	8%	8%	0%	2%
0.2	5%	5%	1%	3%
0.3	3%	6%	0%	1%
0.4	0%	6%	0%	1%
0.5	2%	2%	1%	2%
0.6	4%	5%	0%	4%
0.7	5%	5%	0%	2%
0.8	7%	7%	1%	3%
0.9	4%	4%	0%	2%
1	5%	5%	0%	2%

Khi tần số tăng từ $\Omega = 20$ rad/s lên $\Omega = 50$ rad/s:

- Biên độ lớn nhất của độ võng và góc xoắn không đổi.
- Chu kỳ dao động ngắn lại: các giá trị cực đại của độ võng và góc xoắn thay đổi với tần suất cao hơn, trục dao động nhanh hơn
- Biên độ dao động tại các thời điểm trung gian ($t \neq 0$) có xu hướng tăng nhẹ, đặc biệt ở các thời điểm gần cộng hưởng.
- Tại thời điểm $t=0$, độ võng và góc xoắn đạt lớn nhất và gần như không đổi giữa 2 tần số do điều kiện $\cos(\Omega t) = 1$ tại thời điểm này

Với $\Omega = 50$ rad/s, các biên độ dao động có xu hướng duy trì ở mức cao trong khoảng thời gian khảo sát, tần suất trục dao động đạt giá trị lớn nhất tăng ảnh hưởng đến độ bền của trục. Trong khi đó, với $\Omega = 20$ rad/s, dao động có xu hướng giảm biên độ, cho thấy trục dao động với biên độ ít hơn và ổn định hơn.

Đối với cả hai tần số, độ võng và góc xoắn đều biến thiên điều hòa theo thời gian, do lực kích động là lực điều hòa. Các đỉnh và đáy của dao động xuất hiện với chu kỳ nhất định, khẳng định hệ trục tuân theo quy luật dao động tuyến tính trong giai đoạn khảo sát.

3.2.4. Kết quả số vào thảo luận

1) Mô hình bài toán và thông số vật liệu

Trong mục này sẽ đưa ra bài toán và các thông số vật liệu với cơ tính biến đổi theo chiều dọc trục để minh họa cho phương trình PTHH đã xây dựng được ở chương 2 và thuật toán, chương trình số được lập trình trên phần mềm Matlab. Các tính toán minh họa cho thuật toán số và chương trình số với trục có cơ tính biến đổi theo chiều dọc trục cùng vật liệu hai pha được tạo từ thép không gỉ SUS304 (pha m) + gốm Al_2O_3 (pha c), cụ thể tại đầu trái $x=0$ vật liệu thuần túy là thép, tại đầu phải $x=L$ vật liệu thuần túy là gốm, cơ tính của vật liệu thay đổi liên tục phụ thuộc vào k , n theo công thức (2.2).

Kích thước trục: chiều dài $L = 0,5$ (m), đường kính $d = 0,02$ (m); bán kính trung bình bánh răng tại trung điểm của trục $R_{tb} = 0,06$ (m); các lực tác dụng lên trục tại vị trí trung điểm của trục có dạng $F = P_0 \cdot \cos(\Omega t)$; $M = R \cdot P_0 \cdot \cos(\Omega t)$; $P = 1500$ (N).

Các thông số của vật liệu thành phần:

$$E_m = 2,1.10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$G_m = 8.10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

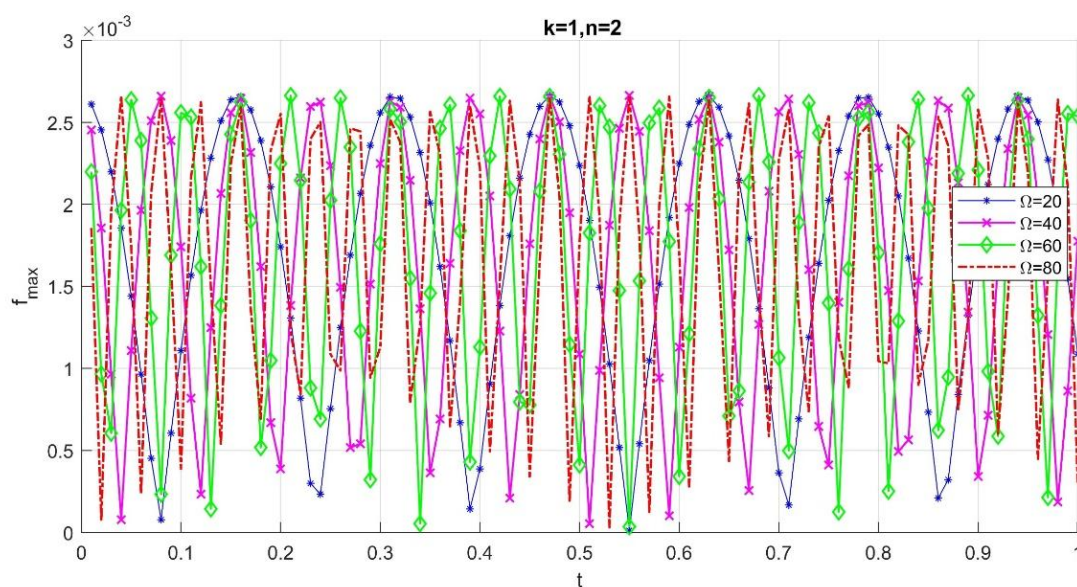
$$\rho_m = 7863 \text{ (kg/m}^3\text{)};$$

$$E_c = 3,8.10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

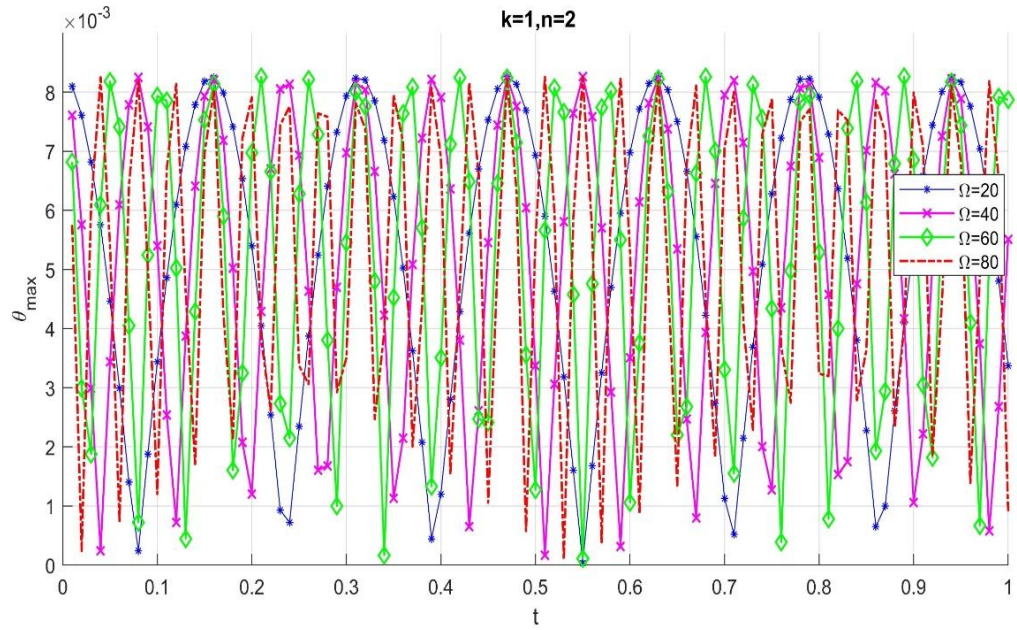
$$G_c = 18,6.10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)};$$

$$\rho_c = 3961 \text{ (kg/m}^3\text{)}.$$

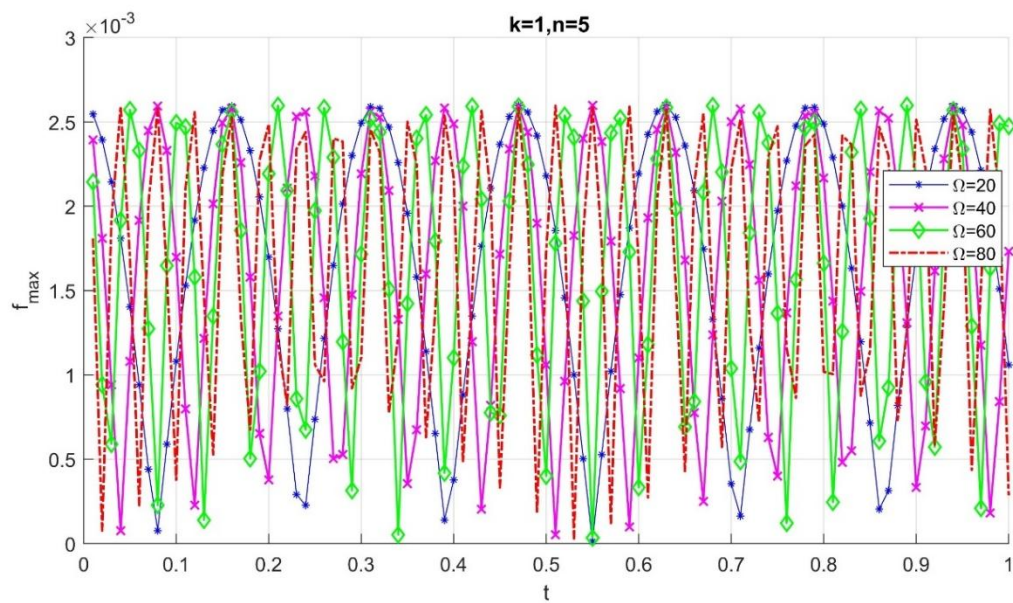
2) Tác động của tần số lực kích động



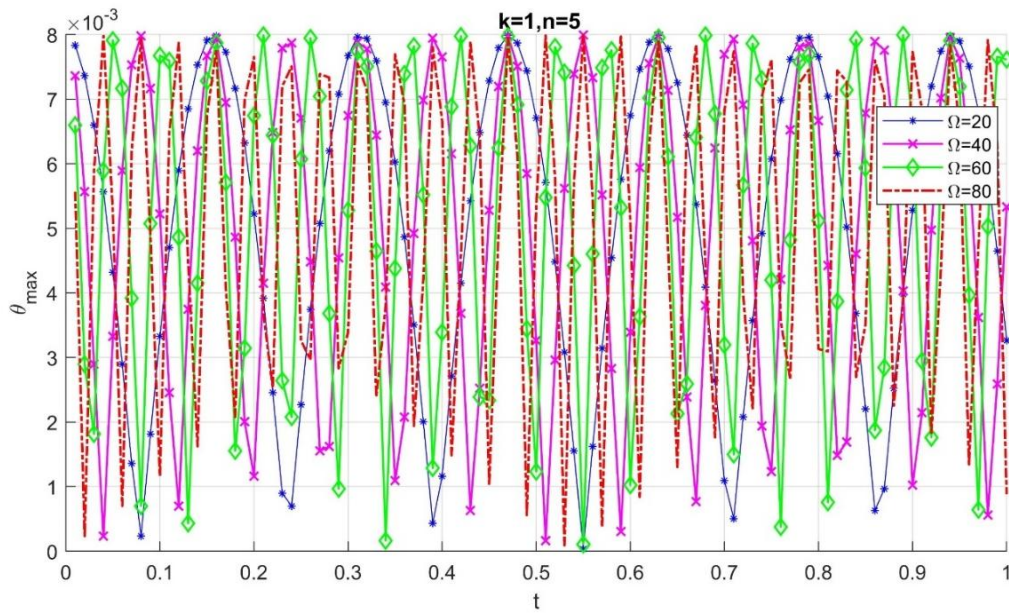
Hình 3.2: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=2$



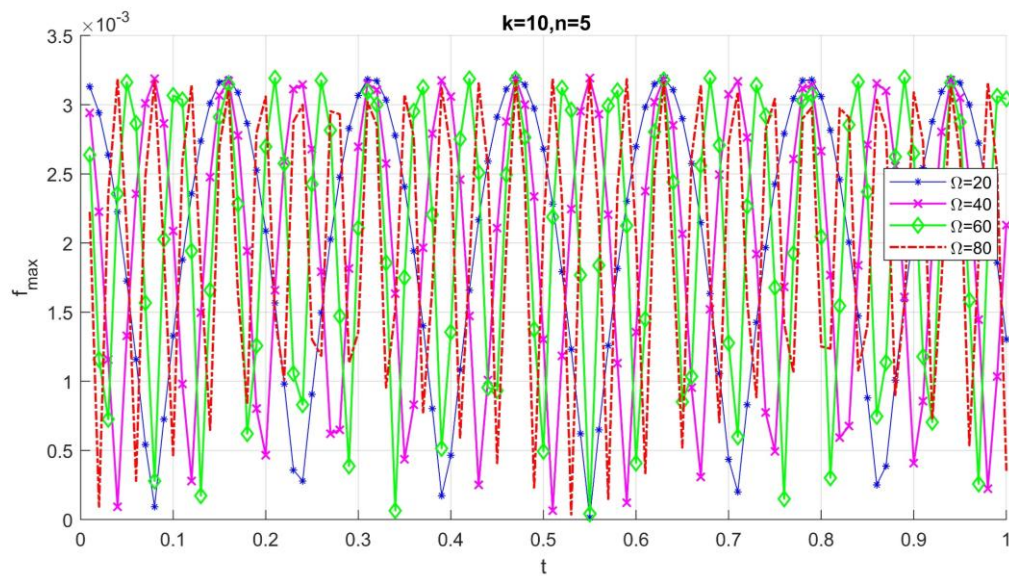
Hình 3.3: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=2$



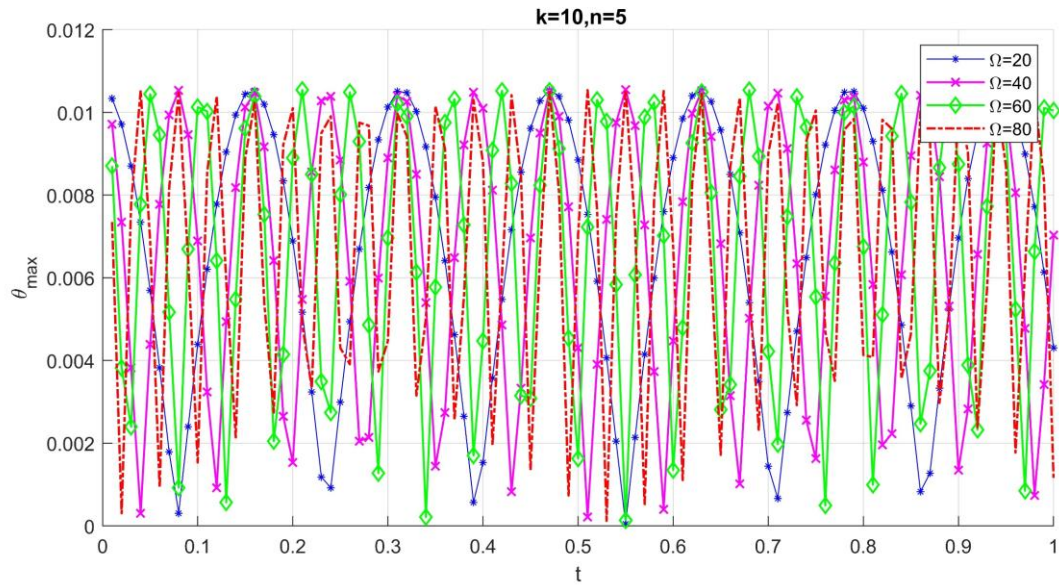
Hình 3.4: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=5$



Hình 3.5: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 1, n=5$



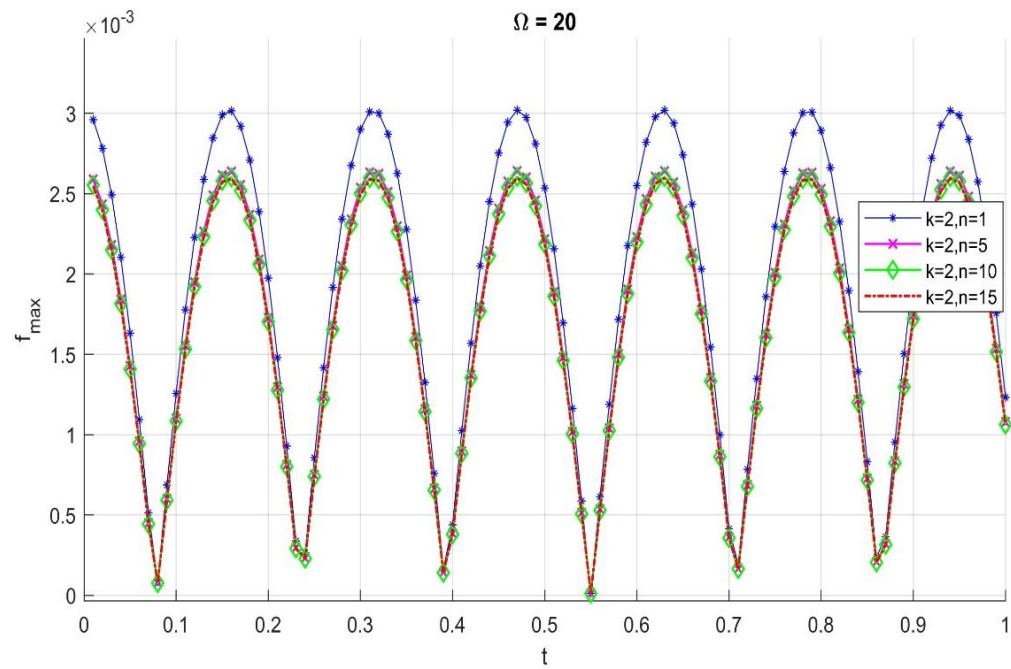
Hình 3.6: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $k = 10, n=5$



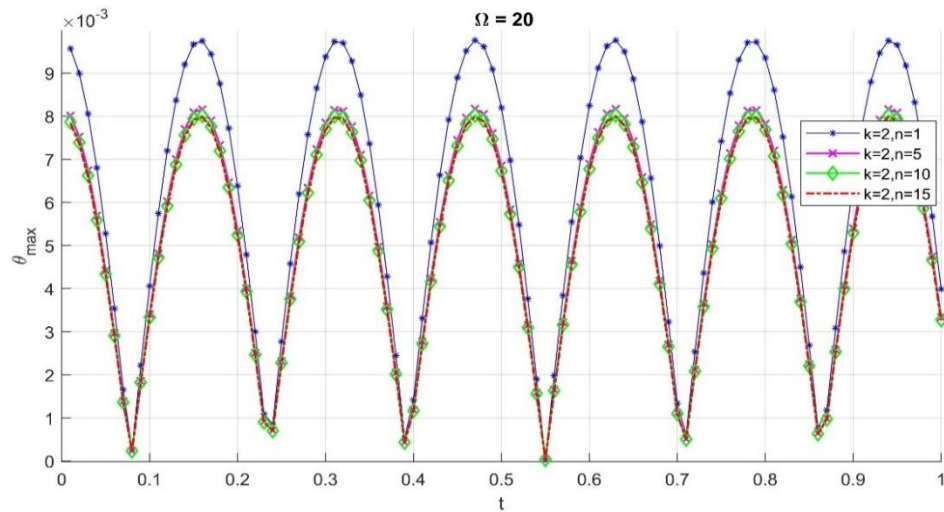
Hình 3.7: Ảnh hưởng của tần số lực kích động đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $k = 10, n=5$

Với các điều kiện hệ số k và n không đổi, khi hệ số Ω tăng (từ 20 rad/s đến 80 rad/s), tuy độ lớn của độ võng và góc xoắn của trục không bị ảnh hưởng nhưng chu kỳ mỗi dao động giảm chu kỳ mỗi dao động giảm, tức là hệ dao động với tần suất lớn hơn, thời gian ngắn hơn cho mỗi chu kỳ dẫn đến sự gia tăng số lượng cực trị trong khoảng thời gian khảo sát. Biên độ độ võng và góc xoắn lớn nhất có xu hướng tăng theo Ω , đặc biệt trong các trường hợp trục FGM có tỷ lệ vật liệu không đồng nhất rõ rệt (k, n lớn) độ võng là góc xoắn càng đạt giá trị lớn. Ngược lại với tần số dao động cường độ thấp $\Omega = 20$ rad/s, biên độ dao động giảm rõ rệt theo thời gian, cho thấy hệ dao động ổn định, ít gây hư hại đến trục. Ở các giá trị Ω lớn, các đỉnh biên độ xuất hiện với tần suất lớn, có xu hướng duy trì và tăng dần theo thời gian để gây ra hiện tượng cộng hưởng. Đây là yếu tố cần đặc biệt quan tâm trong thiết kế kết cấu chịu tải dao động, nhằm tránh các nguy cơ mất ổn định, nứt gãy hoặc giảm tuổi thọ chi tiết.

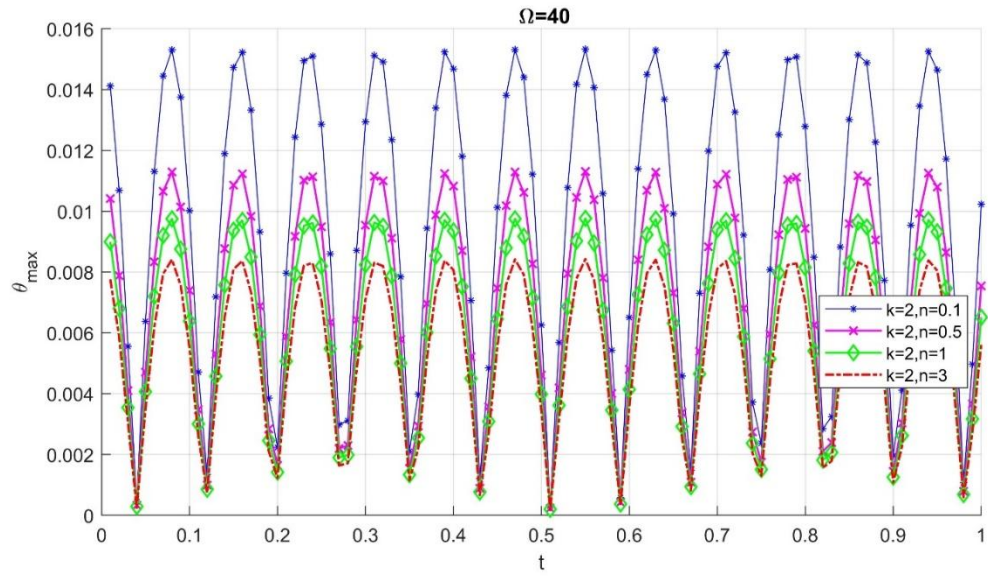
3) Ảnh hưởng của các tham số vật liệu n, k



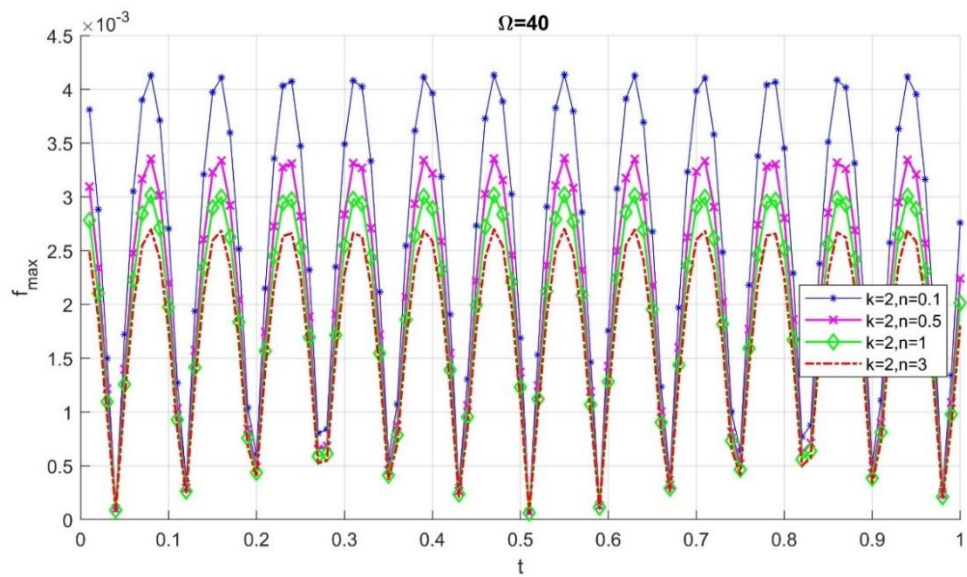
Hình 3.8: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20$ rad/s, $k=2$



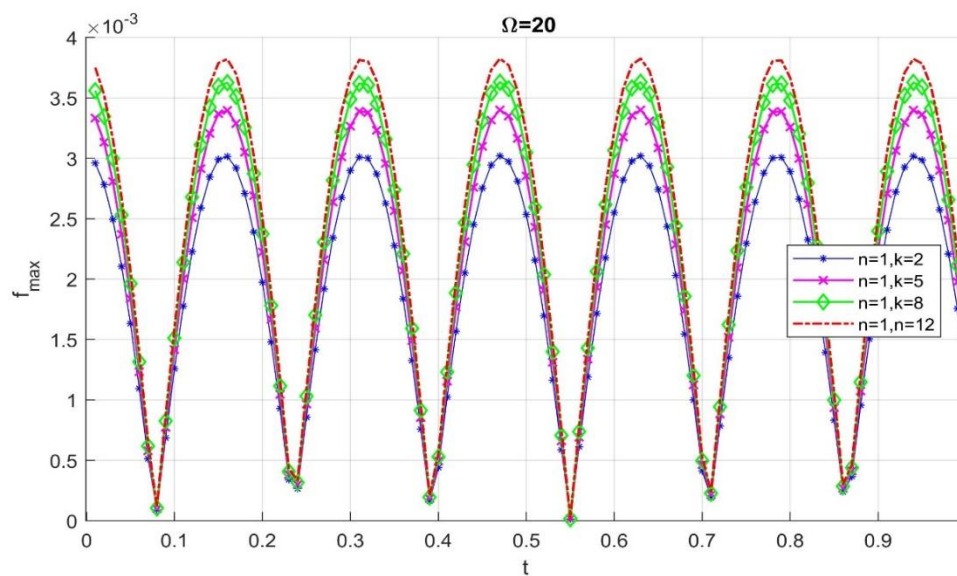
Hình 3.9: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20$ rad/s, $k=2$



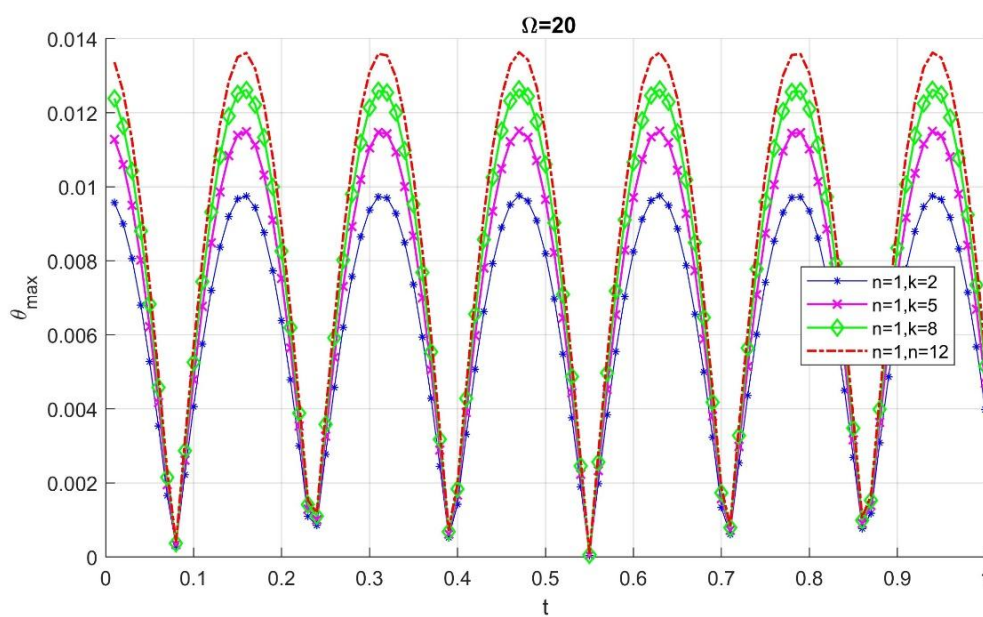
Hình 3.10: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $k=2$



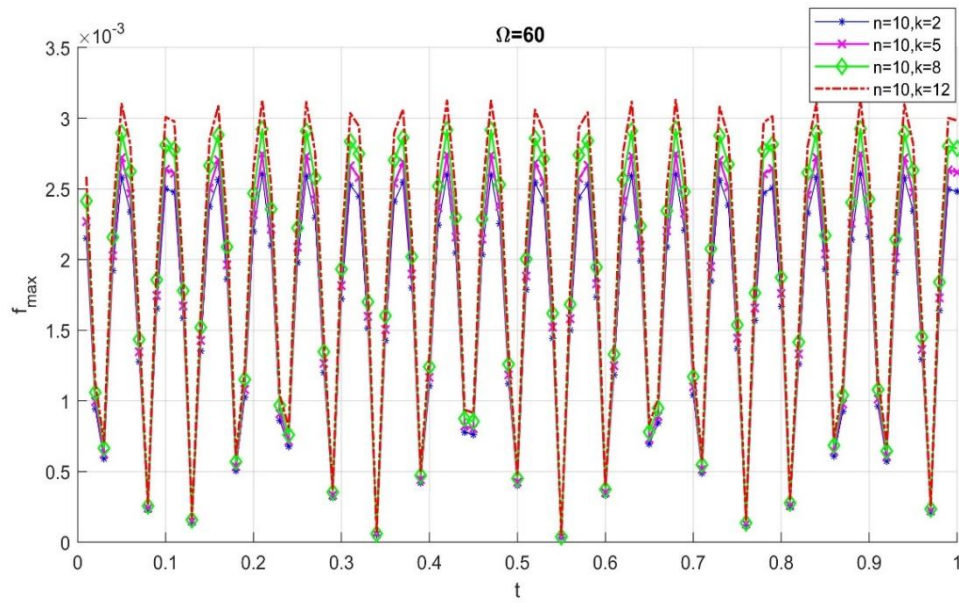
Hình 3.11: Ảnh hưởng của tham số vật liệu n , k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $k=2$



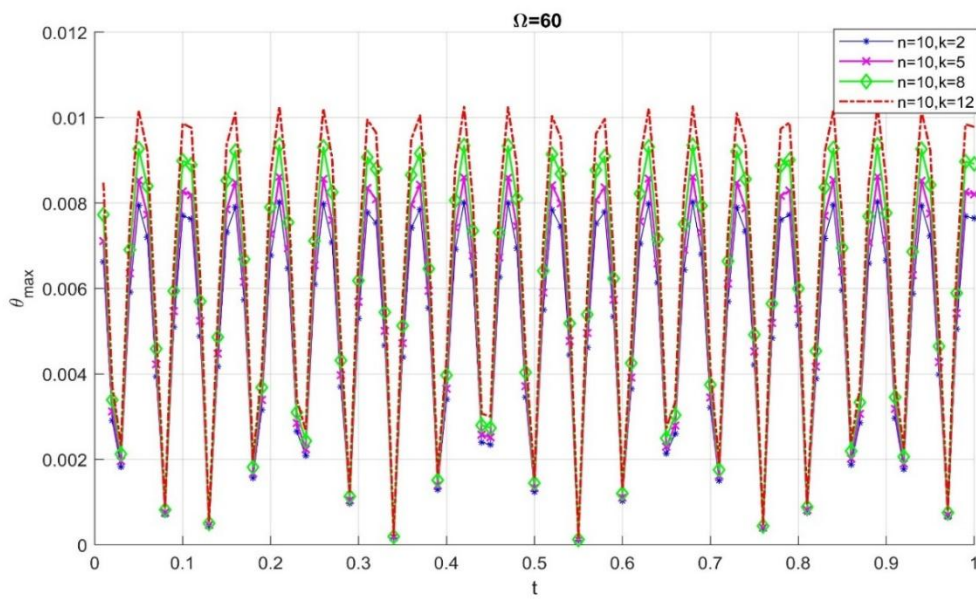
Hình 3.12: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20$ rad/s, $n=1$



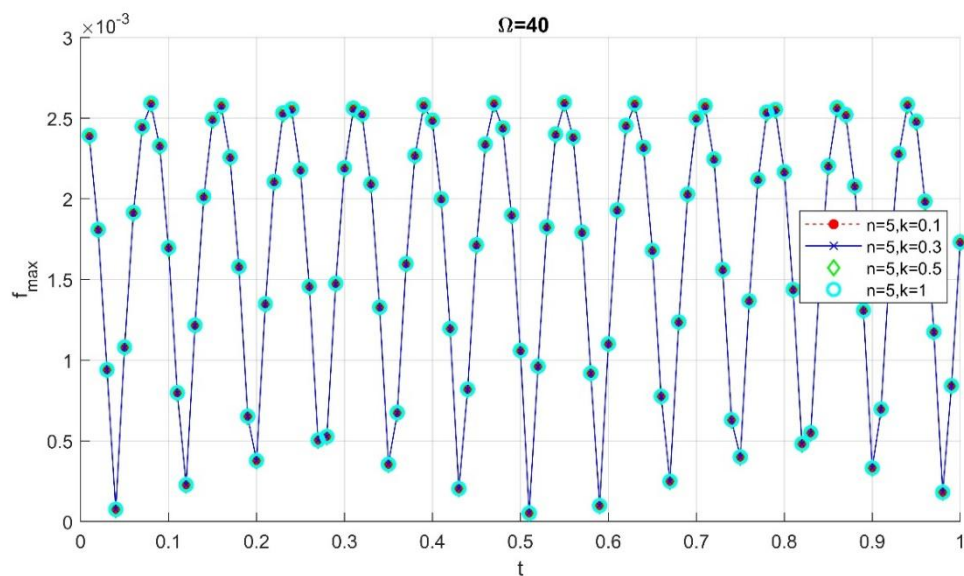
Hình 3.13: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=20$ rad/s, $n=1$



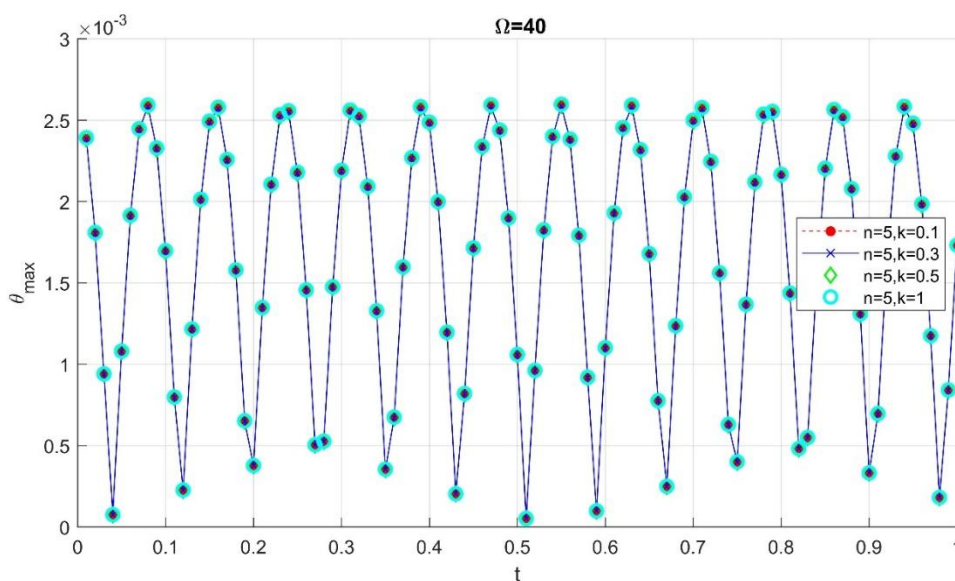
Hình 3.14: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=60$ rad/s, $n=10$.



Hình 3.15: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=60$ rad/s, $n=10$



Hình 3.16: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $n=5$



Hình 3.17: Ảnh hưởng của tham số vật liệu k đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $n=5$

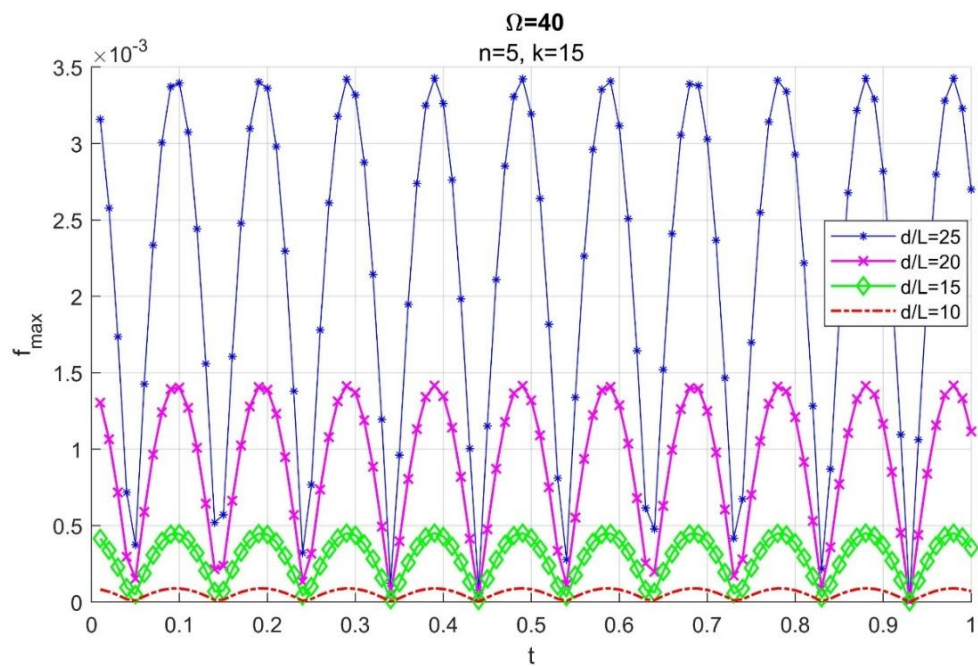
Các hình từ 3.8 đến 3.17 trong luận văn mô tả rõ ràng ảnh hưởng của hai tham số vật liệu đặc trưng của trục FGM - đó là chỉ số phân bố vật liệu “ n ” và tỉ lệ thành phần pha gốm-kim loại “ k ” đến các đáp ứng động học như độ võng lớn nhất và góc xoắn lớn nhất theo thời gian t .

- Khi giữ nguyên k và tăng dần n , xu hướng chung là độ võng và góc xoắn lớn nhất đều giảm dần theo thời gian. Điều này cho thấy sự tăng lên của n dẫn đến sự tăng cường về tỷ lệ vật liệu gốm ở mặt ngoài trực- nơi chịu ứng suất lớn nhất, từ đó làm tăng độ cứng tổng thể và giảm biến dạng, nhưng khiến trực dễ gãy hơn.
- Khi giữ nguyên n và thay đổi k , tỷ lệ gốm tăng so với kim loại, độ võng và góc xoắn lớn nhất tăng. Đặc biệt với tần số dao động cưỡng bức càng lớn $\Omega=60$ rad/s, dao động không ổn định do gốm là vật liệu có độ bền kéo và khả năng chống xoắn thấp hơn kim loại khi ở trong điều kiện rung động cưỡng bức liên tục, dẫn đến biến dạng lớn hơn và không ổn định khi tăng hệ số k .

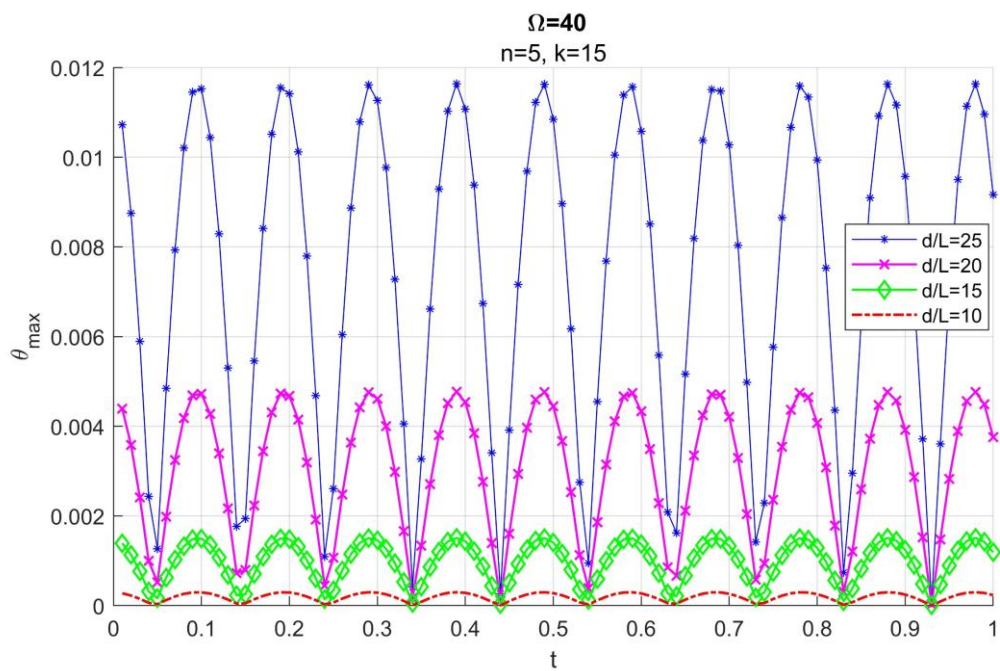
Từ hình 3.2 đến 3.17, các kết quả mô phỏng chỉ ra rằng các tham số n và k không ảnh hưởng gì đến động học tuyến tính của trực FGM mà phụ thuộc vào tần số dao động cưỡng bức Ω :

- Ở các giá trị Ω giống nhau, sự thay đổi hệ số n và k chỉ gây ra biến thiên nhỏ về độ võng và góc xoắn. Tại một số giá trị đặc biệt, khi thay đổi giá trị hệ số k , giá trị về độ võng và góc xoắn lớn nhất là gần giống nhau.

4) Ảnh hưởng của kích thước mặt cắt tới biến dạng của trực



Hình 3.18: Ảnh hưởng của kích thước mặt cắt đến độ võng lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $n=5$, $k=15$



Hình 3.19: Ảnh hưởng của kích thước mặt cắt đến góc xoắn lớn nhất theo thời gian t khi $\Omega=40$ rad/s, $n=5$, $k=15$

Từ hình 3.18 và 3.19, cho thấy khi giữ nguyên các thông số $\Omega=40$ rad/s, $n=5$, $k=15$ và thay đổi kích thước mặt cắt ngang của trục:

- Khi tăng kích thước mặt cắt (tỷ số L/d) giảm, độ võng và góc xoắn đều giảm rõ rệt, độ cứng tổng thể của trục tăng. Điều này phù hợp với cơ học kết cấu cổ điển, trong đó momen quán tính tiết diện và momen xoắn phân bố tăng theo đường kính, góp phần hạn chế biến dạng do tải trọng động.
- Việc tối ưu hóa hình học tiết diện trục là một hướng đi hiệu quả song song với cải tiến vật liệu nhằm đáp ứng nhu cầu nâng cao độ bền và giảm dao động.

5) Tần số dao động riêng

Bảng 3.5. Ảnh hưởng của tham số vật liệu tới tần số dao động $\Omega = 40$ (rad/s). Tần số dao động riêng (Hz)				
Tham số vật liệu k, n	L/d=25	L/d=20	L/d=15	L/d=10
k=1, n=5	8.9404	9.1639	9.3499	9.4899
k=1, n=10	8.9992	9.2194	9.4023	9.5398
k=1, n=15	9.0080	9.2271	9.4089	9.5456
k=3, n=5	8.2922	8.5201	8.7109	8.8553
k=6, n=5	7.3895	7.5952	7.7677	7.8984
k=10, n=5	6.6770	6.8589	7.0111	7.1262
k=15, n=5	6.1841	6.3484	6.4857	6.5894

Theo bảng 3.3, ta thấy khi giữ nguyên hệ số k và tăng hệ số n, tần số dao động riêng có xu hướng tăng nhẹ. Điều này cho thấy tác dụng làm cứng của việc gia tăng hàm lượng gốm ở lớp ngoài trục, dẫn đến khả năng chống dao động riêng. Khi giữ nguyên hệ số n và tăng hệ số k, tần số dao động riêng giảm đáng kể, cho thấy hệ trở nên mềm hơn về mặt động học. Tỷ lệ L/d càng lớn, biên dạng trục trở nên càng dài và mỏng, tần số dao động riêng càng thấp. Điều này phù hợp với lý thuyết dao động dầm cổ điển.

Việc lựa chọn tham số vật liệu n , k và biên dạng hình học của trục L/d có ảnh hưởng sâu sắc đến tính chất dao động của trục, từ đó ảnh hưởng đến khả năng cộng hưởng khi vận hành trục dưới ảnh hưởng dao động cưỡng bức tuần hoàn của trục. Khi thiết kế thực tế, cần đồng thời tối ưu ba yếu tố này để đảm bảo hiệu quả của trục.

3.3. Kết luận chương 3

Chương 3 đã trình bày chi tiết quá trình xây dựng công thức phần tử hữu hạn cho bài toán trục tròn có cơ tính biến thiên theo phương ngang. Trong chương này, các biểu thức của ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc-tơ lực nút dành cho phần tử trục FGM được thiết lập đầy đủ trên cơ sở năng lượng biến dạng đàn hồi, động năng của phần tử và thế năng do tác động của tải trọng di động.

Bên cạnh việc xây dựng mô hình lý thuyết, chương cũng trình bày thuật toán tính toán trong miền thời gian để phân tích đáp ứng động lực học của trục chịu tác động tải trọng di động. Phương pháp tích phân trực tiếp Newmark, cụ thể là biến thể sử dụng gia tốc trung bình, được sử dụng để giải hệ phương trình chuyển động. Từ mô hình này, các đại lượng đặc trưng như độ võng cực đại và góc xoắn cực đại của trục FGM được xác định thông qua thuật toán số.

Kết quả thu được từ các phép tính sẽ được trình bày trong cùng chương. Đồng thời, để kiểm nghiệm và đánh giá độ chính xác của mô hình lý thuyết, phần mềm mô phỏng ANSYS được sử dụng để mô phỏng quá trình biến dạng của trục trong trường hợp vật liệu đồng nhất. Các kết quả mô phỏng này được so sánh với kết quả thu được từ mô hình phần tử hữu hạn và phương pháp giải tích, từ đó đánh giá mức độ phù hợp của mô hình số đã xây dựng.

Trên cơ sở kết quả tính toán và mô phỏng, chương cũng phân tích ảnh hưởng của các yếu tố như tần số dao động cưỡng bức, hệ số vật liệu n và k , cũng như tỷ lệ giữa kích thước mặt cắt và chiều dài trục đến đáp ứng dao động của trục FGM. Những nhận xét rút ra từ quá trình phân tích sẽ được tổng hợp lại trong phần Kết luận, đồng thời đưa ra một số kiến nghị cho các hướng nghiên cứu tiếp theo trong tương lai.

KẾT LUẬN

Luận văn đã xây dựng được mô hình phần tử hữu hạn cho trục tròn làm bằng vật liệu có cơ tính biến đổi (FGM) theo phương ngang, nhằm phân tích ứng xử động lực học của chi tiết trục chịu tải trọng di động. Đây là hướng nghiên cứu mang tính thời sự, phù hợp với xu hướng sử dụng vật liệu thông minh và kỹ thuật số trong phân tích kết cấu hiện đại.

Dựa trên cơ sở lý thuyết của dầm Euler–Bernoulli và Timoshenko, luận văn đã xây dựng đầy đủ các biểu thức năng lượng biến dạng, động năng và thế năng ngoại lực cho trục tròn FGM. Từ các biểu thức này, hệ phương trình vi phân chuyển động được thiết lập thông qua nguyên lý Hamilton. Phương pháp phần tử hữu hạn sau đó được triển khai để rời rạc hóa hệ phương trình, với việc xây dựng chi tiết các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và véc-tơ lực nút dựa trên các hàm dạng phù hợp cho phần tử trục hai nút. Mô hình phần tử hữu hạn thu được có khả năng phản ánh chính xác sự biến đổi liên tục của tính chất vật liệu theo bán kính tiết diện.

Bên cạnh đó, luận văn đã ứng dụng phương pháp giải tích trực tiếp Newmark để giải bài toán dao động trong miền thời gian. Thuật toán tính toán được lập trình trên phần mềm MATLAB, kết hợp với mô phỏng số bằng ANSYS nhằm kiểm chứng độ chính xác của mô hình phần tử hữu hạn đã xây dựng. Kết quả cho thấy sự phù hợp cao giữa các phương pháp, đặc biệt trong việc mô tả độ võng và góc xoắn theo thời gian của trục FGM.

Phân tích kết quả số từ chương 3 cho thấy:

- **Tham số vật liệu n** (mô tả sự sắp xếp vật liệu theo bán kính) có ảnh hưởng rõ rệt đến độ cứng và đáp ứng dao động của trục. Khi tăng n , độ cứng trục tăng lên và biên độ dao động giảm, đặc biệt trong điều kiện kích động gần cộng hưởng.
- **Tham số k** (tỷ lệ thành phần vật liệu gốm – kim loại) cho thấy ảnh hưởng ngược lại. Khi k tăng, thành phần gốm tăng dẫn đến hệ trở nên

giòn hơn và có xu hướng tăng biến dạng động học. Kết quả này phản ánh sự tương tác phi tuyến giữa cấu trúc vật liệu và điều kiện kích động.

- **Tần số kích động Ω** và hình học trục (qua tỷ số $L/dL/dL/d$) cũng ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng động học, đặc biệt trong vùng gần cộng hưởng. Kích thước mặt cắt có thể làm gia tăng biên độ cực đại dao động do ảnh hưởng đến độ cứng và khối lượng phân bố của hệ.
- **Tần số dao động riêng** của trục FGM chịu ảnh hưởng đồng thời bởi các tham số vật liệu và hình học. Việc tối ưu hóa thiết kế cần xét đến nguy cơ trùng với tần số kích thích, từ đó tránh hiện tượng cộng hưởng nguy hiểm.

Luận văn cũng đã làm rõ sự phù hợp và hiệu quả của phương pháp phần tử hữu hạn trong việc mô phỏng dao động của các kết cấu có cơ tính biến đổi liên tục, vượt trội so với các phương pháp giải tích trong bài toán có điều kiện vật liệu phi tuyến hoặc hình học thay đổi phức tạp.

Tóm lại, luận văn đã đạt được các mục tiêu nghiên cứu đặt ra ban đầu, xây dựng thành công công thức phần tử hữu hạn cho trục FGM có cơ tính biến đổi theo phương ngang, đồng thời phát triển quy trình tính toán số hiệu quả và kiểm chứng qua mô phỏng. Các kết quả thu được đóng góp có ý nghĩa thực tiễn và học thuật trong việc phân tích dao động và thiết kế các chi tiết dạng trục trong môi trường làm việc phức tạp. Nghiên cứu mở ra hướng tiếp cận mới cho việc tối ưu hóa vật liệu và hình học trong thiết kế kết cấu FGM.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyen Dinh Kien, Tran Thi Thom, Free vibration of tapered BFGM beam using an efficient shear deformable finite element model, *Steel and Composite Structure*, 363-377, 2018.
- [2] A.E.Alshorbagy, M.A Eltaher, and F.F Mahmoud, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, *Applied Mathematical Modeling*, 35,412-425, 2011.
- [3] M.A.Benatta, I.Mechab, A.Tounsi, and E.A.Adda Bedia, Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects, *Computational Materials Science*, 2008, pp. 44(2), 765–773.
- [4] Li, X.-F., A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams, *Journal of Sound and Vibration*, 2008, pp. 44(2), 765–773.
- [5] J. Ying, C.F. Lu, and W.Q. Chen, Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations, *Composite Structures*, 2008, pp. 84(3), 209–219.
- [6] S.A. Sina, H.M. Navazi, and H. Haddadpour, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams, *Materials & Design*, 2009, pp. 30(3), 741–747.
- [7] G. Giunta, D. Crisafulli, S. Belouettar, and E. Carrera, Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams, *Composite Structures*, 2011, pp. 94(1), 68–74.
- [8] Liu, D. Wei and Y., Analytic and finite element solutions of the power-law Euler–Bernoulli beams, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, pp. 52, 31-40.

- [9] D. Wei, Y. Liu, and Z. Xiang, An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks, *Journal of Sound and Vibration*, 2012, pp. 331(7), 1686–1700.
- [10] S.K. Lai, J. Harrington, Y. Xiang, and K.W. Chow, Accurate analytical perturbation approach for large amplitude vibration of functionally graded beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, pp. 47(5), 473–480.
- [11] M. Birsan, T. Sadowski, L. Marsavina, E. Linul, and D. Pietras, Mechanical behavior of sandwich composite beams made of foams and functionally graded materials, *International Journal of Solids and Structures*, 2013, pp. 50(3-4), 519–530.
- [12] Shu, Y. Liu and D.W., Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination, *Composites Part B: Engineering*, 2014, pp. 59, 166–172.
- [13] Y. Kiani and M.R. Eslami, Thermal buckling analysis of functionally graded material beams, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2010, pp. 59, 166–172.
- [14] A. Mahi, E.A. Adda Bedia, A. Tounsi, and I. Mechab, An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions, *Composite Structures*, 2010, pp. 92(8), 1877-1887.
- [15] N. Wattanasakulpong, B.G. Gangadhara, and D.W. Kelly,, Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, pp. 53(9), 734–743.

- [16] L.S. Ma and D.W. Lee, Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading, *European, European Journal of Mechanics A/Solids*, 2012, pp. 31(1), 13–20.
- [17] U. Eroglu, In-plane free vibrations of circular beams made of functionally graded material in thermal environment: Beam theory approach, *Composite Structures*, 2015, pp. 122, 217–228.
- [18] H. Shen and Z.X. Wang, Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, pp. 81, 195–206.
- [19] A. Fallah and M.M. Aghdam, Nonlinear free vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2011, pp. 30(4), 571-583.
- [20] Y. Kiani, M. Sadighi, S. Jedari Salami, and M.R. Eslami, Low velocity impact response of thick FGM beams with general boundary conditions in thermal field, *Composite Structures*, 2013, pp. 104, 293-303.
- [21] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, and M.R. Eslami, Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation, *Composite Structures*, 2013, pp. 106, 225-234.
- [22] N.A. Apetre, B.V. Sankar, and D.R. Ambur, Low-velocity impact response of sandwich beams with functionally graded core, *International Journal of*, 2006, pp. 43(9), 2479–2496.
- [23] M. Simsek and T. Kocaturk, Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load, *Composite Structures*, 2009, pp. 90(4), 465-473.

- [24] J. Yang, Y. Chena, Y. Xiang, and X.L. Jia, Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 2008, pp. 312(1-2), 166–181.
- [25] A.-Y. Tang, J.-X. Wu, X.-F. Li, and K.Y. Lee, Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, pp. 89, 1–11.
- [26] M. Komijani, S.E. Esfahani, J.N. Reddy, Y.P. Liu, and M.R. Eslami, Nonlinear thermal stability and vibration of pre/post-buckled temperature and microstructure-dependent functionally graded beams resting on elastic foundation, *Composite Structures*, 2014, pp. 112, 292–307.
- [27] C. Jin and X. Wang, Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method, *Composite Structure*, 2015, pp. 51(1), 223-249.
- [28] F. Ebrahimi, F. Ghasemi, and E. Salari, Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities, *Meccanica*, 2016, pp. 51(1), 223-249.
- [29] S. Agarwal, A. Chakraborty, and S. Gopalakrishnan, Large deformation analysis for anisotropic and inhomogeneous beams using exact linear static solution, *Composite Structures*, 2006, pp. 72(1), 91–104.
- [30] R. Kadoli, K. Akhtar, and N. Ganesan, Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory, *Applied Mathematical Modelling*, 2008, pp. 99, 193–201.
- [31] A.E. Alshorbagy, M.A. Eltaher, and F.F. Mahmoud, Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 2011, pp. 35(1), 412–425.

- [32] S.C. Mohanty, R.R. Dash, and T. Rout, Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation, *Nuclear Engineering and Design*, 2011, pp. 241(8), 2698–2715.
- [33] G. De Pietro, Y. Hui, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera, and H. Hu, Hierarchical one-dimensional finite elements for the thermal stress analysis of three-dimensional functionally graded beams, *Composite Structures*, 2016, pp. 153, 514–528.
- [34] A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, and J.N. Reddy, A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003, pp. 45(3), 519–539.
- [35] R.K. Bhangale and N. Ganesan, Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, pp. 295(1-2), 294–316.
- [36] D. Koteswara Rao and Tarapada Roy, "Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Shaft System," *Procedia Engineering*, pp. 144, 775-780, 2016.
- [37] Minwoo Hong and Usik Lee, "Dynamics of a functionally graded material axial bar: Spectral element modeling and analysis," *Elsevier*, vol. Part B 69, pp. 427-434, 2015.
- [38] A. Boukhalfa, "Dynamic Analysis of a Spinning Functionally Dynamic Analysis of a Spinning Functionally of the Finite Element Method," *Latin American Journal of Solids and Structures*, pp. 2018-2038, 2014.
- [39] Nguyễn Văn Luật, Trần Thị Thu Thủy và Nguyễn Thị Thu Hương, "Phân tích động học của dầm Timoshenko chịu nhiều tải trọng di động và ảnh hưởng của nhiệt độ bằng phương pháp phần tử hữu hạn," *Science Technology*, 2019.

- [40] L. T. Hà, Phân tích dầm FGM có mặt cắt ngang thay đổi chịu tải trọng di động, Hà Nội: Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, 2016.
- [41] T. T. Thơm, Mô hình phần tử hữu hạn trong phân tích dao động của dầm có cơ tính biến đổi theo hai chiều, Hà Nội: Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, 2019.
- [42] B. V. Tuyền, Dao động của dầm FGM có lỗ rỗng vi mô trong môi trường nhiệt độ chịu tải trọng di động, Hà Nội : Học viện Khoa học và Công nghệ, VAST, 2018.
- [43] Trung-Kien Nguyen, Thuc P. Vo, and Huu-Tai Thai, "Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, p. 147–157, 2013.
- [44] Huu-Tai Thai and Thuc P. Vo, "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories," *International Journal of Mechanical Sciences*, pp. 62(1), 57–66, 2012.
- [45] Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai, Trung-Kien Nguyen, A. Maheri, and J. Lee, "Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory," *Engineering Structures*, pp. 64, 12–22, 2014.
- [46] Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai, Trung-Kien Nguyen, F. Inam, and J. Lee, "A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams," *Composite Structures*, pp. 119, 1–12, 2015.
- [47] Luan C. Trinh, Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai and Trung-Kien Nguyen, "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads," *Composites Part B: Engineering*, pp. 100, 152–163, 2016.

- [48] Nguyen Dinh Kien, B.S. Gan, and Trinh Thanh Huong, "Geometrically nonlinear analysis of planar beam and frame structures made of functionally graded material," *Structural Engineering and Mechanics*, pp. 49(6), 727–743, 2014.
- [49] Nguyen Dinh Kien and Tran Thi Thom, "A corotational formulation for large displacement analysis of functionally graded sandwich beam and frame structures," *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 2016(1-2), 1-12, 2016.
- [50] Trinh Thanh Huong, B.S. Gan, and Nguyen Dinh Kien, "Post-buckling responses of elastoplastic FGM beams on nonlinear elastic foundation," *Structural Engineering & Mechanics*, pp. 58(3), 515–532, 2015.
- [51] Nguyen Dinh Kien, Tran Thi Thom, S. Alexandrov, and Le Thi Ha, "Elastoplastic analysis of functionally graded metal-ceramic beams under mechanical loading," *Vietnam Journal of Mechanics*, pp. 39(1), 13–29, 2017.
- [52] Nguyen Dinh Kien and Bui Van Tuyen,, "Dynamic analysis of functionally graded Timoshenko beams in thermal environment using a higher-order hierarchical beam element," *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 2017,1-12, 2017.
- [53] Thom Van Do, Dinh Kien Nguyen, Nguyen Dinh Duc, Duc Hong Doan, and Tinh Quoc Bui, "Analysis of bi-directional functionally graded plates by FEM and a new third-order shear deformation plate theory," *Thin-Walled Structures*, pp. 119, 687–699, 2017.
- [54] G. Shi, "A new simple third-order shear deformation theory of plates," *International Journal of Solids and Structures*, pp. 44(13), 4399–4417, 2007.
- [55] Luan C. Trinh, Thuc P. Vo, Huu-Tai Thai, and Trung-Kien Nguyen, "Sizedependent vibration of bi-directional functionally graded microbeams

with arbitrary boundary conditions," *Composites Part B: Engineering*, pp. 134, 225-245, 2018.

- [56] Van-Luat Nguyen, "Dynamic Analysis of Shaft with Variable Mechanical Property under Dynamic Load by FEM Method," *UNIVERSAL WISER PUBLISHER*", Volume 2 Issue 1, 5, 2023.